Lois de probabilités discrètes

▶ Exercice n°1
On a

x_i	1	2	3
p_i	1/3	1/3	1/3

Donc X suit une loi uniforme discrète sur $\{1;2;3\}$.

▶ Exercice n°2
On a

x_i	1	2
p_i	0,5	0,5

Donc X suit une loi uniforme discrète sur $\{1;2\}$.

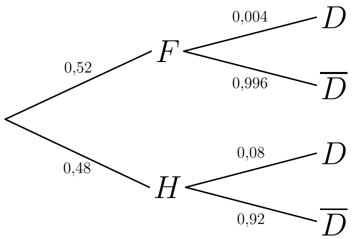
▶ Exercice n°3
La loi de probabilité complète est :

x_i	1	2	3
p_i	0,3	0,3	0,4

Il n'y a pas équiprobabilité donc X ne suit pas une loi uniforme discrète.

▶ Exercice n°4
On aurait $p(X=1) = 1/36$ (seul cas favorable sur les 36 cas possibles : les deux dés donnent 1), mais par exemple $p(X=2) = 3/36$ (1er dé à 1 et 2e dé à 2 ; 1er dé à 2 et 2e dé à 1 ; les 2 dés à 2 : 3 cas favorables).
Il n'y a pas équiprobabilité donc X ne suit pas une loi uniforme discrète.

▶ Exercice n°5
Arbre pondéré correspondant à la situation :



Probabilité demandée : $p_{D}(F) = \dfrac{p(F \cap D)}{p(D)} = \dfrac{0{,}52 \times 0{,}004}{0{,}52 \times 0{,}004 + 0{,}48 \times 0{,}08} \approx 0{,}05$

▶ Exercice n°6

1. Cela revient à répéter 5 fois de façon identique et indépendante l'épreuve de Bernoulli « face » $(p = 0{,}5)$; « pile » $(1-p = 0{,}5)$. Donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0{,}5$.
2. $p\,(X = 3) = \binom{5}{3} \times 0{,}5^3 \times 0{,}5^2 = 0{,}3125$
3. $p\,(X = 0) = (0{,}5)^5 = 0{,}03125$
4. $1 - p\,(X = 0) = 1 - 0{,}03125 = 0{,}96875$

▶ Exercice n°7

1. Cela revient à répéter 6 fois de façon identique et indépendante l'épreuve de Bernoulli « 5 ou 6 » $(p = 1/3)$; « ni 5, ni 6 » $(1 - p = 2/3)$. Donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = 1/3$.
2. $p\,(X = 2) = \binom{6}{2} \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^4 \approx 0{,}329$

▶ Exercice n°8
Une urne contient des jetons noirs et des jetons blancs. Le nombre de jetons noirs est le triple du nombre de jetons blancs.

1. $\dfrac{3}{4}$
2. a) Cela revient à répéter 4 fois de façon identique et indépendante l'épreuve de Bernoulli « noir » $(p = 3/4)$; « blanc » $(1 - p = 1/4)$. Donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 3/4$.

   b) $p\,(X = 2) = \binom{4}{2} \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^2 \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^2 \approx 0{,}2109$

   c) $p\,(X = 2) + p\,(X = 3) \approx 0{,}2109 + \binom{4}{3} \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^3 \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^1 \approx 0{,}6328$

   d) $E\,(X) = n \times p = 4 \times \dfrac{3}{4} = 3$. Cela représente le nombre moyen de jetons noirs que l'on peut espérer si on répète le tirage de 4 jetons un grand nombre de fois.

▶ Exercice n°9

1. Si on note X le nombre d'objets sans défaut, X suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}92$.
   Probabilité que les dix objets soient sans défaut $= p\,(X = 10) = 0{,}92^{10} \approx 0{,}4344$.

2. Probabilité qu'au moins 8 objets soient sans défaut $= p(X=8) + p(X=9) + p(X=10) = \binom{10}{8} \times 0{,}92^8 \times 0{,}08^2 + \binom{10}{9} \times 0{,}92^9 \times 0{,}08^1 + 0{,}92^{10} \approx 0{,}9599$

▶ Exercice n°10

1. Si on note X le nombre de jours avec panne, X suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0{,}95$.
   Probabilité qu'en cinq jours, la machine ne tombe pas en panne $= p(X=0) = 0{,}95^{10} \approx 0{,}7738$.
2. Probabilité qu'en cinq jours, la machine ne tombe pas en panne plus d'une journée $= p(X=0) + p(X=1) = 0{,}95^{10} + \binom{5}{1} \times 0{,}05^1 \times 0{,}95^4 \approx 0{,}9774$.

▶ Exercice n°11

1. X suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{1}{15}$.
   $p(X=k) = \binom{10}{k} \times \left(\frac{1}{15}\right)^k \times \left(\frac{14}{15}\right)^{10-k}$.
2. $E(X) = n \times p = 10 \times \frac{1}{15} \approx 0{,}667$.
3. Gain moyen $\approx 100 \times 0{,}667 \approx 66{,}7$

▶ Exercice n°12

Notons X le nombre de parties que l'on gagne.

- 1er cas : X suit la loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 0{,}5$.
  Probabilité de « gagner deux parties sur quatre » $= p(X=2) = \binom{4}{2} \times 0{,}5^2 \times 0{,}5^2 = 0{,}375$
- 2e cas : X suit la loi binomiale de paramètres $n = 8$ et $p = 0{,}5$.
  Probabilité de« gagner quatre parties sur huit » $= p(X=4) = \binom{8}{4} \times 0{,}5^4 \times 0{,}5^4 \approx 0{,}273$

Le 1er cas est le plus probable.

▶ Exercice n°13

Partie A

1. Cela revient à répéter 4 fois de façon identique et indépendante l'épreuve de Bernoulli « fille » $(p = 0{,}5)$; « garçon » $(1 - p = 0{,}5)$. Donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 0{,}5$.
2. $1 - p(X=0) = 1 - 0{,}5^4 = 0{,}9375$

Partie B

1. $1 - p(X=0) = 1 - 0{,}5^n$
2. $1 - 0{,}5^n \geqslant 0{,}99 \Leftrightarrow 1 - 0{,}99 \geqslant 0{,}5^n \Leftrightarrow 0{,}5^n \leqslant 0{,}01$.
3. Compléter le script python ci-dessous pour qu'il permette de déterminer cet entier.

```
n=1
while 0.5**n > 0.01 :
  n=n+1
print(n)
```

▶ Exercice n°14

1. Cela revient à répéter une épreuve de Bernoulli et X représente le nombre d'épreuves à répéter pour avoir le premier succès, donc X suit la loi géométrique de paramètre $p = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$.
2. $p(X=6) = \frac{1}{8} \times \left(\frac{3}{8}\right)^5 = 0{,}000927$
3. $p(X > 6) = \left(\frac{3}{8}\right)^6 = 0{,}002781$
4. $p(X \leqslant 6) = 1 - p(X > 6) = 0{,}997219$

▶ Exercice n°15

1. Cela revient à répéter une épreuve de Bernoulli et X représente le nombre d'épreuves à répéter pour avoir le premier succès, donc X suit la loi géométrique de paramètre $p = 0{,}6$.
2. $p(X > 4) = (0{,}4)^4 = 0{,}0256$

▶ Exercice n°16

Partie A

1. $p(X=0) = 0{,}4^{20} \approx 1{,}0995 \times 10^{-8}$
2. $p(X=0) + p(X=1) = 0{,}4^{20} + \binom{20}{1} \times 0{,}6^1 \times 0{,}4^{19} \approx 3{,}4085 \times 10^{-7}$
3. a) $a = 8$
   b) $b = 16$
   Conclusion : si le maire avait raison, il y aurait théoriquement 95% de chance que, sur 20 habitants interrogés, le nombre de ceux qui lui font confiance soit compris entre 8 et 16.

Partie B

Ce résultat met fortement en doute l'affirmation du maire.