Fonction logarithme népérien

▶ Exercice n°1

1. $\ln(8) = \ln\left(2^3\right) = 3\ln 2$
2. $\ln(8) + \ln(32) = \ln\left(2^3\right) + \ln\left(2^5\right) = 3\ln 2 + 5\ln 2 = 8\ln 2$
3. $\ln(64) - \ln(8) = \ln\left(2^6\right) - \ln\left(2^3\right) = 6\ln 2 - 3\ln 2 = 3\ln 2$
4. $\ln(16) - 3\ln(2) = \ln\left(2^4\right) - 3\ln 2 = 4\ln 2 - 3\ln 2 = \ln 2$

▶ Exercice n°2

1. $\ln\left(\dfrac{1}{9}\right) = -\ln 9 = -\ln\left(3^2\right) = -2\ln 3$
2. $\ln(81) - 2\ln(3) = \ln\left(3^4\right) - 2\ln 3 = 4\ln 3 - 2\ln 3 = 2\ln 3$
3. $\ln\left(\dfrac{3}{\mathrm{e}}\right) = \ln 3 - \ln \mathrm{e} = \ln 3 - 1$
4. $\ln\left(9\mathrm{e}^2\right) = \ln 9 + \ln\left(\mathrm{e}^2\right) = \ln\left(3^2\right) + 2 = 2\ln 3 + 2$

▶ Exercice n°3

1. $f'(x) = 1 \times \ln x + x \times \dfrac{1}{x} = \ln x + 1$
2. $f'(x) = 2 \times \dfrac{1}{x} \times \ln x = \dfrac{2\ln x}{x}$
3. $f'(x) = -\dfrac{\frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = -\dfrac{1}{x(\ln x)^2}$
4. $f'(x) = \dfrac{4 \times \frac{1}{x} \times x^2 - 4\ln x \times 2x}{x^4} = \dfrac{4x - 8x\ln x}{x^4} = \dfrac{4 - 8\ln x}{x^3}$

▶ Exercice n°4

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x + \ln x = +\infty$.
2. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$, donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x \times \dfrac{1}{x} = -\infty$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \ln x = -\infty$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} x(1-\ln x) = -\infty$
4. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 3(\ln x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^2 = 0^2 = 0$, donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 3(\ln x) + x^2 = -\infty$
5. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x = -\infty$, donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x} - \ln x = +\infty$

▶ Exercice n°5

1. CE : $x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$.
   $\ln(x+1) = 0 \Leftrightarrow \ln(x+1) = \ln 1 \Leftrightarrow x + 1 = 1 \Leftrightarrow x = 0$. $S = \{0\}$.
2. CE : $2 - 3x > 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3} > x$
   $\ln(2-3x) = \ln 4 \Leftrightarrow 2 - 3x = 4 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$. $S = \left\{-\frac{2}{3}\right\}$.
3. CE : $4x > 0$ et $x - 3 > 0 \Leftrightarrow x > 3$
   $\ln(4x) = \ln(x-3) \Leftrightarrow 4x = x - 3 \Leftrightarrow x = -1$ qui ne vérifie pas la CE. $S = \varnothing$
4. CE : $x - 1 > 0$ et $x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$
   $\ln(x-1) + \ln(x-2) = \ln 6 \Leftrightarrow \ln\left[(x-1)(x-2)\right] = \ln 6 \Leftrightarrow (x-1)(x-2) = 6$ $\Leftrightarrow x^2 - 2x - x + 2 = 6 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$. $\Delta = 25$; $x_1 = -1$ qui ne vérifie pas la CE ; $x_2 = 4$. $S = \{4\}$.
5. CE : $x > 0$
   $\ln x = 4 \Leftrightarrow x = \mathrm{e}^4$. $S = \left\{\mathrm{e}^4\right\}$.
6. CE : $2x > 0 \Leftrightarrow x > 0$
   $\ln(2x) = 5 \Leftrightarrow 2x = \mathrm{e}^5 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^5$. $S = \left\{\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^5\right\}$.
7. CE : $3x > 0 \Leftrightarrow x > 0$
   $\ln(3x) = 1 \Leftrightarrow 3x = \mathrm{e}^1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}\,\mathrm{e}$. $S = \left\{\frac{1}{3}\,\mathrm{e}\right\}$.
8. CE : $1 + x > 0 \Leftrightarrow x > -1$
   $\ln(1+x) = -2 \Leftrightarrow 1 + x = \mathrm{e}^{-2} \Leftrightarrow x = \mathrm{e}^{-2} - 1$. $S = \left\{\mathrm{e}^{-2} - 1\right\}$.

▶ Exercice n°6

1. CE : $x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$
   $\ln(x+1) \leqslant 0 \Leftrightarrow \ln(x+1) \leqslant \ln 1 \Leftrightarrow x + 1 \leqslant 1 \Leftrightarrow x \leqslant 0$. $S = \left]-1\,;\,0\right]$
2. CE : $x > 0$
   $\ln x \geqslant 3 \Leftrightarrow x \geqslant \mathrm{e}^3$. $S = \left[\mathrm{e}^3\,;\,+\infty\right[$
3. CE : $x > 0$
   $1 - \ln x \geqslant 0 \Leftrightarrow 1 \geqslant \ln x \Leftrightarrow \mathrm{e}^1 \geqslant x$. $S = \left]0\,;\,\mathrm{e}\right]$

▶ Exercice n°7

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x = -\infty$, donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

$f'(x) = x + \frac{1}{x}$ toujours strictement positif sur $]0;+\infty[$. Donc f est strictement croissante sur sur $]0;+\infty[$.

▶ Exercice n°8

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x - 1 = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
2. $f'(x) = 1 \times (\ln x - 1) + x \times \dfrac{1}{x} = \ln x - 1 + 1 = \ln x$.

x	$0,5$		1		$+\infty$
$f'(x) = \ln x$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$0,5(\ln 0,5 - 1)$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

3. Utilisons un tableau de signe car c'est un produit.
   Pour le signe de $\ln x - 1$ sur $[0{,}5\,;\,+\infty[$: $\ln x - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow \ln x \geqslant 1 \Leftrightarrow x \geqslant e^1$

x	$0,5$		e		$+\infty$
x		$+$	$\vert$	$+$	
$\ln x - 1$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	

▶ Exercice n°9

1. $f(5) = 107{,}25$ décibels
2. $f'(x) = 8{,}68 \times \frac{1}{x}$ qui reste strictement positif si $x > 0$.
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 8{,}68 \times \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 8{,}68 \times \ln x + 93{,}28 = +\infty$
4. a)

```
from math import*
x=1
while 8.68*log(x)+93.28 <=120 :
  x=x+1
print(x)
```

   b) $8{,}68 \times \ln x + 93{,}28 = 120 \Leftrightarrow 8{,}68 \times \ln x = 26{,}72 \Leftrightarrow \ln x = \frac{26{,}72}{8{,}68}$
   $\Leftrightarrow x = e^{\frac{26{,}72}{8{,}68}} \approx 21{,}72$. Le premier entier qui convient est 22 et c'est ce que devrait afficher le script.

▶ Exercice n°10

$B'(x) = -2x + 10 - 9{,}8 \times \dfrac{1}{x} = \dfrac{-2x^2 + 10x - 8}{x}$.
Pour le signe de $-2x^2 + 10x - 8$: $\Delta = 36$; $x_1 = 4$; $x_2 = 1$.

x	1		4		6
$-2x^2 + 10x - 8$	0	$+$	0	$-$	
x	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	
$B'(x)$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$B(x)$	0	$\nearrow$	$3,9096$	$\searrow$	$0,6659$

Il faut produire 4 centaines d'objets pour obtenir un bénéfice maximal.

▶ Exercice n°11

1. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} 3 - 2x = 3$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \ln x = -\infty$, donc $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x) = +\infty$.
   $\lim\limits_{x\to+\infty} 3 - 2x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.
2. $f'(x) = -2 - \frac{1}{x}$ qui reste strictement négatif si $x > 0$. f est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.
3. $y = f(1) + f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y = 1 - 3(x - 1) \Leftrightarrow y = -3x + 4$.
4. Étudions le signe de $f(x) - (3 - 2x) = -\ln x$.
   Sur $]0; 1[$, $\ln x < 0$ et $-\ln x > 0$. La courbe de f est au dessus de la droite D sur $]0; 1[$.
   Sur $]0; +\infty[$, $\ln x > 0$ et $-\ln x < 0$. La courbe de f est en dessus de la droite D sur $]0; +\infty[$.
5. Sur $[1\,;\,2]$, f est continue et strictement décroissante et 0 est compris entre $f(1) = 1$ et $f(2) \approx -1{,}7$.
   La calculatrice indique que $1{,}3 < x_0 < 1{,}4$. Une valeur approchée de x_0 à 0,1 près par défaut est donc 1,3.
6. $f'(x) = -\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2}$ qui reste strictement positif. f est bien convexe sur $]0; +\infty[$.

▶ Exercice n°12

1. $f'(x) = \frac{3}{3x-6} = \frac{1}{x-2}$
2. $f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$
3. $f'(x) = \frac{-2}{-2x+4} = \frac{1}{x-2}$
4. $f'(x) = \dfrac{-\frac{1}{x^2}}{3+\frac{1}{x}} = \dfrac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{3x+1}{x}} = -\dfrac{1}{x^2} \times \dfrac{x}{3x+1} = -\dfrac{1}{x(3x+1)}$
5. $f'(x) = \dfrac{\frac{3\times(x-2)-3x\times 1}{(x-2)^2}}{\frac{3x}{x-2}} = \dfrac{-6}{(x-2)^2} \times \dfrac{x-2}{3x} = \dfrac{-2}{3(x-2)}$

▶ Exercice n°13

1. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \ln x = -\infty$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x) = +\infty$
   $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} 6x+1 = 1$ et $\lim\limits_{\substack{X\to 1\\x>1}} \ln x = \ln 1 = 0$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} g(x) = 0$
2. $f'(x) = \dfrac{-4}{x}$ et $g'(x) = 4 \times \dfrac{6}{6x+1}$.

x	0		1
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0

x	0		1
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	4 ln7

3. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow -4\ln x = 4\ln(6x+1)$ et $0 < x \leqslant 1$
   $\Leftrightarrow -\ln x = \ln(6x+1)$ et $0 < x \leqslant 1 \Leftrightarrow \ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = \ln(6x+1)$ et $0 < x \leqslant 1$
   $\Leftrightarrow \dfrac{1}{x} = 6x+1$ et $0 < x \leqslant 1 \Leftrightarrow 0 = 6x^2 + x - 1$ et $0 < x \leqslant 1$
   $\Delta = 25$; $x_1 = -\dfrac{1}{2} \notin]0\,;\,1]$ et $x_2 = \dfrac{1}{3} \in]0\,;\,1]$. Le prix d'équilibre est égal à $\dfrac{1}{3}$.

▶ Exercice n°14

1. $3^n \geqslant 800 \Leftrightarrow \ln(3^n) \geqslant \ln(800) \Leftrightarrow n\underbrace{\ln 3}_{+} \geqslant \ln(800) \Leftrightarrow n \geqslant \dfrac{\ln(800)}{\ln(3)} \approx 6{,}08$.
   Le plus petit entier qui convient est $n = 7$.
2. $\left(\dfrac{1}{3}\right)^n \leqslant 0{,}01 \Leftrightarrow \ln\left[\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right] \leqslant \ln(0{,}01) \Leftrightarrow n\underbrace{\ln\left(\dfrac{1}{3}\right)}_{-} \leqslant \ln(0{,}01)$
   $\Leftrightarrow n \geqslant \dfrac{\ln(0{,}01)}{\ln\left(\dfrac{1}{3}\right)} \approx 4{,}19$.
   Le plus petit entier qui convient est $n = 5$.
3. $(1{,}03)^n \geqslant 2 \Leftrightarrow \ln\left[(1{,}03)^n\right] \geqslant \ln(2) \Leftrightarrow n\underbrace{\ln(1{,}03)}_{+} \geqslant \ln(2)$
   $\Leftrightarrow n \geqslant \dfrac{\ln(2)}{\ln(1{,}03)} \approx 23{,}45$. Le plus petit entier qui convient est $n = 24$.
4. $(0{,}95)^n \leqslant 0{,}2 \Leftrightarrow \ln\left[(0{,}95)^n\right] \leqslant \ln(0{,}2) \Leftrightarrow n\underbrace{\ln(0{,}95)}_{-} \leqslant \ln(0{,}2)$
   $\Leftrightarrow n \geqslant \dfrac{\ln(0{,}2)}{\ln(0{,}95)} \approx 31{,}37$. Le plus petit entier qui convient est $n = 32$.

▶ Exercice n°15

1. a) $\text{pH} = -\log\left[10^{-2}\right] = 2$
   b) $10^{-2} \times 0{,}15 = 0{,}0015$ moles
2. a) Concentration= 0,0015 car on a 0,0015 moles dans une solution d'1 litre ($150 + 850$ millilitres).
   b) $\text{pH} = -\log[0{,}0015] \approx 2{,}8$

▶ Exercice n°16

1. $\log\left(\dfrac{A}{A_0}\right) = 5 \Leftrightarrow \dfrac{A}{A_0} = 10^5$
2. $\log\left(\dfrac{100\times A}{A_0}\right) = \log(100) + \log\left(\dfrac{A}{A_0}\right) = 2 + \log\left(\dfrac{A}{A_0}\right)$. La magnitude augmente de 2.

▶ Exercice n°17

1. $A = \dfrac{1}{5} \times 10 \times \log\left(\dfrac{5}{3{,}5}\right) \approx 0{,}31$ décibels par kilomètre
2. $A = \dfrac{1}{10} \times 10 \times \log(10) = 1$ décibel par kilomètre
3. On a toujours $P_s < P_e$ (la puissance de sortie est toujours inférieure à la puissance d'entrée)
   Donc $\dfrac{P_e}{P_s} > 1$ et $\log\left(\dfrac{P_e}{P_s}\right) > 0$. A ne peut donc pas être négatif.