Limites de fonctions

▶ Exercice n°1

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x+\sqrt{x}=+\infty$
   Pas d'asymptote horizontale
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}-\sqrt{x}=-\infty$
   Pas d'asymptote horizontale
3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}+1=1$
   La courbe admet une asymptote horizontale d'équation $y=1$ en $+\infty$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} x+1=+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x+1}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x+1}-2=-2$
   La courbe admet une asymptote horizontale d'équation $y=-2$ en $+\infty$

▶ Exercice n°2

1. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^3}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^3}-x=+\infty$
   Pas d'asymptote horizontale
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2+\dfrac{1}{x^2}=+\infty$
   Pas d'asymptote horizontale
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} x+3=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x+3}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x+3}-2=-2$
   La courbe admet une asymptote horizontale d'équation $y=-2$ en $-\infty$
4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}-2=-2$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\frac{1}{x}-2}=-\dfrac{1}{2}$.
   Et comme, $\lim\limits_{x\to-\infty} x+1=-\infty$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)\times\dfrac{1}{\frac{1}{x}-2}=+\infty$
   Pas d'asymptote horizontale

▶ Exercice n°3

1. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} x=0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\dfrac{1}{x}=-\infty$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} x+\dfrac{1}{x}=-\infty$
   $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x=0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{1}{x}=+\infty$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x+\dfrac{1}{x}=+\infty$
   La courbe de f admet une asymptote verticale d'équation $x=0$.
2. $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}} x+2=0^-$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}}\dfrac{1}{x+2}=-\infty$
   Et comme, $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}} 3x-2=-8$, on en déduit que $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}}(3x-2)\times\dfrac{1}{x+2}=+\infty$
   $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}} x+2=0^+$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}}\dfrac{1}{x+2}=+\infty$
   Et comme, $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}} 3x-2=-8$, on en déduit que $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}}(3x-2)\times\dfrac{1}{x+2}=-\infty$
   La courbe de f admet une asymptote verticale d'équation $x=-2$.
3. Signe du dénominateur :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
signe de $1-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

   $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} 1-x^2=0^+$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\dfrac{1}{1-x^2}=+\infty$
   Et comme, $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} x^2+x-3=1^2+1-3=-1$, on en déduit que $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\left(x^2+x-3\right)\times\dfrac{1}{1-x^2}=-\infty$
   $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} 1-x^2=0^-$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\dfrac{1}{1-x^2}=-\infty$
   Et comme, $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} x^2+x-3=-1$, on a $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\left(x^2+x-3\right)\times\dfrac{1}{1-x^2}=+\infty$
   La courbe de f admet une asymptote verticale d'équation $x=1$.

▶ Exercice n°4

La limite en $-\infty$ et en $+\infty$ d'une fonction polynôme est la même que son terme de plus haut degré.

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x^2-x+1=\lim\limits_{x\to-\infty} 2x^2=+\infty$
   $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^2-x+1=\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^2=+\infty$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} 3x^3+2x-1=\lim\limits_{x\to-\infty} 3x^3=-\infty$
   $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^3+2x-1=\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^3=+\infty$

► Exercice n°5

La limite en $-\infty$ et en $+\infty$ d'une fonction rationnelle est la même que le quotient du terme de plus haut degré du numérateur avec celui du dénominateur.

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4x-1}{2x+3} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4x}{2x} = \lim\limits_{x\to-\infty} 2 = 2$
   $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x-1}{2x+3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x}{2x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 2 = 2$
   La courbe admet une asymptote horizontale d'équation $y = 2$ en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2+2x-1}{2x+3} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2}{2x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{2}x = -\infty$
   $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+2x-1}{2x+3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{2x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{2}x = +\infty$
   Pas d'asymptote horizontale.
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-4x+1}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-4x}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} -4\times\dfrac{1}{x} = 0$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$
   $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-4x+1}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-4x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} -4\times\dfrac{1}{x} = 0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$
   La courbe admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $-\infty$ et en $+\infty$.
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-2x^3}{x^3+5x^2-1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-2x^3}{x^3} = \lim\limits_{x\to-\infty} -2 = -2$
   $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2x^3}{x^3+5x^2-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2x^3}{x^3} = \lim\limits_{x\to+\infty} -2 = -2$
   La courbe admet une asymptote horizontale d'équation $y = -2$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

► Exercice n°6

1. Si $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = -\infty$ alors la droite d'équation $x = 1$ est une asymptote verticale à C_f .
2. Si $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 5$ alors la droite d'équation $y = 5$ est une asymptote horizontale à C_f en $-\infty$.

► Exercice n°7

L'affirmation est fausse. Contre-exemple avec f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ qui est bien strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$ mais avec $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

► Exercice n°8

a)
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$. La courbe admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ en $-\infty$ et en $+\infty$.
$\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}} f(x) = -\infty$. La courbe admet une asymptote verticale d'équation $x = -2$.
$\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} f(x) = +\infty$. La courbe admet une asymptote verticale d'équation $x = 2$.
b)
$\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x) = -\infty$. La courbe admet une asymptote verticale d'équation $x = -1$.
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$. La courbe admet une asymptote horizontale d'équation $y = 2$ en $+\infty$.

► Exercice n°9

Lors d'une certaine réaction chimique, la vitesse initiale v de la réaction chimique (exprimée en $\mathrm{mol}\cdot\mathrm{L}^{-1}\cdot\mathrm{s}^{-1}$) en fonction de la concentration x (exprimée en $\mathrm{mol}\cdot\mathrm{L}^{-1}$) d'un certain ion est donnée par $v(x) = \dfrac{0{,}0013\times x}{0{,}000004+x}$ pour $x\in[0\,;+\infty[$.

1. $v(0) = 0\,\mathrm{mol}\cdot\mathrm{L}^{-1}\cdot\mathrm{s}^{-1}$
2. $v\left(9\times10^{-6}\right) = 0{,}0009\,\mathrm{mol}\cdot\mathrm{L}^{-1}\cdot\mathrm{s}^{-1}$
3. C'est une fonction rationnelle.
   $\lim\limits_{x\to+\infty} v(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{0{,}0013\times x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 0{,}0013 = 0{,}0013.$
   Quand la concentration de l'ion devient de plus en plus grande, la vitesse de réaction se stabilise autour de $0{,}0013\,\mathrm{mol}\cdot\mathrm{L}^{-1}\cdot\mathrm{s}^{-1}$
4. La courbe admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0{,}0013$.