Complément sur la fonction exponentielle - Introduction au logarithme

▶ Exercice n°1

a) $\mathrm{e}^{-8} \times \mathrm{e}^{5} = \mathrm{e}^{-3}$ b) $\mathrm{e}^{11x} \times \mathrm{e}^{-4x} = \mathrm{e}^{7x}$ c) $\dfrac{\mathrm{e}^{-4}}{\mathrm{e}^{-3}} = \mathrm{e}^{-1}$ d) $\dfrac{\mathrm{e}^{4x}}{\mathrm{e}^{-7x}} \times \mathrm{e}^{-6x} = \mathrm{e}^{5x}$

▶ Exercice n°2

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 + \mathrm{e}^x = +\infty$
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} 3\mathrm{e}^x = 0$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} x - 3\mathrm{e}^x = -\infty$
3. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^0 = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$, donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \mathrm{e}^x \times \dfrac{1}{x} = +\infty$
4. $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x - \dfrac{1}{x} = 0$

▶ Exercice n°3

Dériver la fonction f dans les cas suivants :

1. $f'(x) = 1 \times \mathrm{e}^x + x \times \mathrm{e}^x = (1+x)\mathrm{e}^x$
2. $f'(x) = \dfrac{2x \times \mathrm{e}^x - x^2 \times \mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x)^2} = \dfrac{(2x - x^2) \times \mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x)^2} = \dfrac{2x - x^2}{\mathrm{e}^x}$
3. $f'(x) = -2x \times \mathrm{e}^x + (1 - x^2) \times \mathrm{e}^x = (-2x + 1 - x^2)\mathrm{e}^x$
4. $f'(x) = -\dfrac{\mathrm{e}^x}{(3 + \mathrm{e}^x)^2}$
5. $f'(x) = 2 \times (-\mathrm{e}^x)(1 - \mathrm{e}^x) = -2\mathrm{e}^x(1 - \mathrm{e}^x)$

▶ Exercice n°4

1. $\mathrm{e}^{x+2} = 1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{x+2} = \mathrm{e}^0 \Leftrightarrow x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$. $S = \{-2\}$.
2. $\mathrm{e}^x + 1 = 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x = -1$. Impossible. $S = \varnothing$
3. $\mathrm{e}^{x^2-x-11} = e \Leftrightarrow \mathrm{e}^{x^2-x-11} = \mathrm{e}^1 \Leftrightarrow x^2 - x - 11 = 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 12 = 0$.
   $\Delta = 49$; $x_1 = -3$; $x_2 = 4$. $S = \{-3\,;\,4\}$.
4. $\mathrm{e}^{-x} - 1 < 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-x} < 1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-x} < \mathrm{e}^0 \Leftrightarrow -x < 0 \Leftrightarrow x > 0$. $S =]0\,;\,+\infty[$.

▶ Exercice n°5

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
2. $f'(x) = 2 \times \mathrm{e}^x + 2x \times \mathrm{e}^x = (2x+2)\mathrm{e}^x$.

x	-10		-1		$+\infty$
$2x+2$		$-$	0	$+$	
e^x		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-20\mathrm{e}^{-10}$	$\searrow$	$-2\mathrm{e}^{-1}$	$\nearrow$	$+\infty$

▶ Exercice n°6

1. $f'(x) = -4\,\mathrm{e}^{-4x}$
2. $f'(x) = 2x\,\mathrm{e}^{x^2+3}$
3. $f'(x) = -\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)\mathrm{e}^{1-\frac{1}{x}} = \dfrac{1}{x^2}\,\mathrm{e}^{1-\frac{1}{x}}$
4. $f'(x) = \dfrac{3 \times (x+1) - 3x \times 1}{(x+1)^2}\mathrm{e}^{\frac{3x}{x+1}} = \dfrac{3}{(x+1)^2}\mathrm{e}^{\frac{3x}{x+1}}$

▶ Exercice n°7

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} -x = -\infty$ et $\lim\limits_{X \to -\infty} \mathrm{e}^X = 0$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} -2x = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} \mathrm{e}^X = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{-2x} = +\infty$.
   Comme d'autre part, $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, on a $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{-2x} + \dfrac{1}{x} + \infty$
3. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} \mathrm{e}^X = +\infty$, donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}} = +\infty$

▶ Exercice n°8

1. On a $g(0) = A\mathrm{e}^0 = A$.
2. a) $g(10) \approx 1{,}70$.
   b) $g'(t) = 2 \times (-0{,}016)\,\mathrm{e}^{-0{,}016t} = -0{,}032\,\mathrm{e}^{-0{,}016t}$ qui est toujours strictement négatif, car un exponentiel est toujours strictement positif.
   c) $\lim\limits_{t \to +\infty} -0{,}016t = -\infty$ et $\lim\limits_{X \to -\infty} \mathrm{e}^X = 0$, donc $\lim\limits_{t \to +\infty} g(t) = 0$.

► Exercice n°9

Compléter les équivalences suivantes :

1. $\mathrm{e}^x = 7 \Leftrightarrow x = \ln 7$
2. $\mathrm{e}^x = 0{,}01 \Leftrightarrow x = \ln(0{,}01)$
3. $\mathrm{e}^{-x} = 0{,}9 \Leftrightarrow -x = \ln(0{,}9) \Leftrightarrow x = -\ln(0{,}9)$
4. $\mathrm{e}^{-2x} = 3 \Leftrightarrow -2x = \ln 3 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}\ln 3$

► Exercice n°10

$A = \mathrm{e}^{\ln 7} = 7$

$B = \mathrm{e}^{-\ln 5} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\ln 5}} = \dfrac{1}{5}$

$C = \mathrm{e}^{3\ln 4} = \left(\mathrm{e}^{\ln 4}\right)^3 = 4^3 = 64$

$D = \mathrm{e}^{\ln 5 + \ln 4} = \mathrm{e}^{\ln 5} \times \mathrm{e}^{\ln 4} = 5 \times 4 = 20$

$E = \mathrm{e}^{-2\ln 7} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{2\ln 7}} = \dfrac{1}{\left(\mathrm{e}^{\ln 7}\right)^2} = \dfrac{1}{7^2} = \dfrac{1}{49}$

► Exercice n°11

1. $\mathrm{e}^x = 3 \Leftrightarrow x = \ln 3$. $S = \{\ln 3\}$.
2. $\mathrm{e}^{x+3} = 5 \Leftrightarrow x + 3 = \ln 5 \Leftrightarrow x = -3 + \ln 5$. $S = \{-3 + \ln 5\}$.
3. $3\mathrm{e}^{-x} - 9 = 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-x} = 3 \Leftrightarrow -x = \ln 3 \Leftrightarrow x = -\ln 3$. $S = \{-\ln 3\}$.
4. $\mathrm{e}^x \geqslant 7 \Leftrightarrow x \geqslant \ln 7$. $S = [\ln 7\,;\, +\infty[$.
5. $8 - 2\mathrm{e}^x \geqslant 0 \Leftrightarrow 4 \geqslant \mathrm{e}^x \Leftrightarrow \ln 4 \geqslant x$. $S =]-\infty\,;\, \ln 4]$.

► Exercice n°12

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} 2x = -\infty$ et $\lim\limits_{X \to -\infty} \mathrm{e}^X = 0$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{2x} = 0$.
   Comme $\lim\limits_{x \to -\infty} 4\mathrm{e}^x = 0$, on a $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} 2\mathrm{e}^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x - 2 = +\infty$.
   On en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
3. La droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale à C_f en $-\infty$.
4. a) $\mathrm{e}^x - 2 \geqslant 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x \geqslant 2 \Leftrightarrow x \geqslant \ln 2$. $S = [\ln 2\,;\, +\infty[$.

   b) $f'(x) = 2\mathrm{e}^{2x} - 4\mathrm{e}^x = 2\mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^x - 2\right)$.

   c)

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$2\,\mathrm{e}^x$		$+$		$+$	
$\mathrm{e}^x - 2$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

$$f(\ln 2) = \mathrm{e}^{2\ln 2} - 4\mathrm{e}^{\ln 2} = \left(\mathrm{e}^{\ln 2}\right)^2 - 4 \times 2 = 2^2 - 8 = -4$$

► Exercice n°13

Un solide dont la température à l'instant $t = 0$ est de 25 C est placé à l'extérieur, où la température est de 8 C. La température de ce corps (en degré celsius) à l'instant t (en secondes) est donné par $\theta(t) = 8 + 17\mathrm{e}^{kt}$ où k est une constante réelle.

1. On doit avoir $\theta(120) = 20 \Leftrightarrow 8 + 17\mathrm{e}^{120k} = 20 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{120k} = \dfrac{12}{17}$
   $\Leftrightarrow 120k = \ln\left(\dfrac{12}{17}\right) \Leftrightarrow k = \dfrac{1}{120} \times \ln\left(\dfrac{12}{17}\right) \approx -0{,}0029$
2. On cherche t tel que $8 + 17\mathrm{e}^{-0{,}0029t} = 15 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-0{,}0029t} = \dfrac{7}{17}$
   $\Leftrightarrow -0{,}0029t = \ln\left(\dfrac{7}{17}\right) \Leftrightarrow t = \dfrac{-1}{0{,}0029} \times \ln\left(\dfrac{7}{17}\right) \approx 306$ secondes.

► Exercice n°14

1. On cherche k tel que $1000\,\mathrm{e}^{-k \times 1} = 937 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-k} = \dfrac{937}{1000} \Leftrightarrow -k = \ln(0{,}937)$
   $\Leftrightarrow k = -\ln(0{,}937) \approx -0{,}065$.
2. Cela revient à chercher t_1 tel que $N(t_1) = 500 \Leftrightarrow 1000\,\mathrm{e}^{-0{,}065t_1} = 500$
   $\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-0{,}065t_1} = 0{,}5 \Leftrightarrow -0{,}065t_1 = \ln(0{,}5) \Leftrightarrow t_1 = \dfrac{\ln(0{,}5)}{-0{,}065} \approx 10{,}7$ heures.
3. Cela revient à chercher t_2 tel que $N(t_1 + t_2) = 250 \Leftrightarrow 1000\,\mathrm{e}^{-0{,}065(t_1+t_2)} = 250$
   $\Leftrightarrow 1000\,\mathrm{e}^{-0{,}065t_1 - 0{,}065t_2} = 250 \Leftrightarrow 1000\,\mathrm{e}^{-0{,}065t_1} \times \mathrm{e}^{-0{,}065t_2} = 250$
   Or, $1000\,\mathrm{e}^{-0{,}065t_1} = 500$. On cherche donc t_2 tel que $500 \times \mathrm{e}^{-0{,}065t_2} = 250$
   $\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-0{,}065t_2} = 0{,}5$. On a donc $t_2 = t_1 \approx 10{,}7$ heures.

► Exercice n°15

1. $f(0) = 10\,\mathrm{e}^0 = 10$.
2. Non, car un exponentiel est toujours strictement positif. De plus $20t + 10$ reste positif car $t \geqslant 0$.

3. $f'(t) = 20 \times e^{-0,5t} + (20t+10)\left(-0,5\,e^{-0,5t}\right) = 20\,e^{-0,5t} - 10t\,e^{-0,5t} - 5\,e^{-0,5t}$
$= (15-10t)e^{-0,5t}$

t	0		$1,5$		$+\infty$
$15-10t$		$+$	0	$-$	
$e^{-0,5t}$		$+$		$+$	
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	10	$\nearrow$	$40\,e^{-0,75}$	$\searrow$	

► Exercice n°16

1. $f'(x) = 50\,e^{-0,5x+1} + 50x\left(-0,5\,e^{-0,5x+1}\right) = 50\,e^{-0,5x+1} - 25x\,e^{-0,5x+1}$
$= (50-25x)e^{-0,5x+1}$

x	0		2		$+\infty$
$50-25x$		$+$	0	$-$	
$e^{-0,5x+1}$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	100	$\searrow$	

Le taux d'hydratation sera maximal au bout de 2 heures.

2.
   - f est continue et strictement croissante sur $[0\,;\,1]$ et 50 est bien compris entre $f(0)=0$ et $f(1)\approx 82,4$.
   - f est continue et strictement décroissante sur $[5\,;\,5,5]$ et 50 est bien compris entre $f(5)\approx 55,8$ et $f(5,5)\approx 47,8$.
3. Non, car d'après la question précédente le taux d'hydratation dépassera 50% sur un intervalle d'amplitude nécessairement inférieure à 5,5 heures.

► Exercice n°17

1. $1-e^{-0,39x} > 0 \Leftrightarrow 1 > e^{-0,39x} \Leftrightarrow e^{0} > e^{-0,39x} \Leftrightarrow 0 > -0,39x \Leftrightarrow x > 0$.
$S =]0\,;\,+\infty[$.

2. a)
   - sur 10 ans : 4082,64 euros car $f(10)\approx 4,08264$
   - sur 15 ans : 4011,55 euros car $f(15)\approx 4,01155$

   b) $f'(t) = 4 \times \left(\dfrac{-\left(-\left(-0,39\,e^{-0,39t}\right)\right)}{\left(1-e^{-0,39t}\right)^2}\right) = \dfrac{-1,56\,e^{-0,39t}}{\left(1-e^{-0,39t}\right)^2}$.
   Le carré et l'exponentiel restant positif, $f'(t)$ reste négative sur $[1\,;\,+\infty[$.

   c) Pour tout $t \geqslant 1$:
   $f(t) - 4 = \dfrac{4-4\left(1-e^{-0,39t}\right)}{1-e^{-0,39t}} = \dfrac{4\,e^{-0,39t}}{1-e^{-0,39t}}$.
   Le numérateur est positif à cause de l'exponentiel et le dénominateur est aussi positif d'après la question 1. On peut en conclure que $f(t)-4$ reste toujours positif et donc que $f(t)$ est toujours supérieur à 4 milliers d'euros.