Dérivation, continuité et convexité

▶ Exercice n°1

1) $f'(x) = 2x - 3$

2) $f'(x) = \dfrac{1}{2}(6x - 4) = 3x - 2$

3) $f'(x) = 3 \times \dfrac{(-1)}{(x+2)^2} = \dfrac{-3}{(x+2)^2}$

4) $f'(x) = \dfrac{2(-x+6) - (2x-1)(-1)}{(-x+6)^2} = \dfrac{11}{(-x+6)^2}$

7) $f'(x) = \dfrac{1(x^2+2) - (x-1)(2x)}{(x^2+2)^2} = \dfrac{-x^2+2x+2}{(x^2+2)^2}$

8) $f'(x) = 1 \times \sqrt{x} + (x+3) \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \dfrac{x+3}{2\sqrt{x}}$

9) $f'(x) = 2 \times 3 \times (3x-1) = 6 \times (3x-1)$

10) $f'(x) = 4 \times \dfrac{1}{2\sqrt{4x+8}} = \dfrac{2}{\sqrt{4x+8}}$

11) $f'(x) = \dfrac{1}{2} \times 3 \times \left(\dfrac{1}{2}x + 4\right)^2 = \dfrac{3}{2} \times \left(\dfrac{1}{2}x + 4\right)^2$

▶ Exercice n°2

1) $f(x) = -x^2 + 6x - 8 \quad a = -1$:
$f(-1) = -15$; $f'(x) = -2x + 6$; $f'(-1) = 8$
$y = -15 + 8(x - (-1)) \Leftrightarrow y = 8x - 7$

2) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-3} \quad a = 4$:
$f(4) = 9$; $f'(x) = \dfrac{2 \times (x-3) - (2x+1) \times 1}{(x-3)^2} = \dfrac{-7}{(x-3)^2}$; $f'(4) = -7$
$y = 9 - 7(x-4) \Leftrightarrow y = -7x + 37$

▶ Exercice n°3

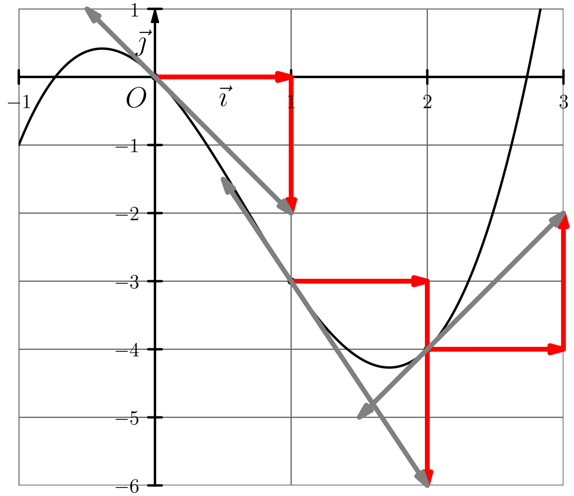
1. $f'(2) =$ coefficient directeur de la tangente en $A = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{0-(-2)}{4-2} = 1$.

2. $f'(4) =$coefficient directeur de la tangente en $C = \dfrac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \dfrac{4-3}{6-4} = \dfrac{1}{2}$.

3. $f'(6) =$ coefficient directeur de la tangente en $E = \dfrac{y_F - y_E}{x_F - x_E} = \dfrac{-2-0}{7-6} = -2$.

▶ Exercice n°4

On a $f'(x) = 3x^2 - 4x - 2$; $f'(0) = -2$; $f'(0) = -3$ et $f'(2) = 2$



▶ Exercice n°5

On a $f'(x) = \dfrac{(-2x+2) \times x - (-x^2+2x-1) \times 1}{x^2} = \dfrac{1-x^2}{x^2}$ et le coefficient directeur d'une tangente est égal à la valeur de la dérivée.

a) tangente horizontale $\Leftrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -1$.
Les points de la courbe d'abscisse 1 et -1 conviennent.

b) coefficient directeur de la tangente $= -2 \Leftrightarrow f'(x) = -2 \Leftrightarrow \dfrac{1-x^2}{x^2} = -2 \Leftrightarrow$ $1 - x^2 = -2x^2$ $(x \neq 0) \Leftrightarrow x^2 = -1$. Impossible.
Aucun point de la courbe ne peut convenir.

c) tangente parallèle à la droite d'équation $y = -\frac{2}{3}x - 5 \Leftrightarrow$ coefficient directeur de la tangente $=$ coefficient directeur de la droite d'équation $y = -\frac{2}{3}x - 5$
$\Leftrightarrow f'(x) = -\dfrac{2}{3} \Leftrightarrow \dfrac{1-x^2}{x^2} = -\dfrac{2}{3} \Leftrightarrow 3 - 3x^2 = -2x^2$ $(x \neq 0) \Leftrightarrow x^2 = 3$
$\Leftrightarrow x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$.
Les points de la courbe d'abscisse $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$ conviennent.

▶ Exercice n°6

D'après la courbe de la dérivée, on a :

x	0		1		3		4
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc, la fonction f doit-être :

- croissante de 0 à 1 ;
- décroissante de 1 à 3 ;
- croissante de 3 à 4.

Seule la figure 3 peut correspondre.

▶ Exercice n°7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$.

1. f est rationnelle. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} 1 = 1$

   De même, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 = 1$

   La droite d'équation $y = 1$ est une asymptote horizontale à la courbe en $-\infty$ et en $+\infty$.

2. $f'(x) = \dfrac{2x(x^2+1)-(x^2-1)(2x)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{4x}{(x^2+1)^2}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$4x$		$-$	0	$+$	
$(x^2+1)^2$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	↘	-1	↗	1

▶ Exercice n°8

1. $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\x>\frac{1}{2}}} 2x-1 = 0^+$, donc $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\x>\frac{1}{2}}} \dfrac{1}{2x-1} = +\infty$. Et comme $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\x>\frac{1}{2}}} 2x^2-x+2 = 2$, on a $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\x>\frac{1}{2}}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\x>\frac{1}{2}}} \left(2x^2-x+2\right) \times \dfrac{1}{2x-1} = +\infty$

   La droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ est une asymptote verticale à la courbe.

   f étant rationnelle, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2}{2x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$.

   Il n'y a pas d'asymptote horizontale à la courbe.

2. $f'(x) = \dfrac{(4x-1)\times(2x-1)-(2x^2-x+2)\times 2}{(2x-1)^2}$

   $= \dfrac{8x^2-4x-2x+1-4x^2+2x-4}{(2x-1)^2} = \dfrac{4x^2-4x-3}{2x-1)^2}$.

   Signe de $4x^2-4x-3$: $\Delta = (-4)^2-4\times4\times(-3) = 64$.

   Du signe de $a = 4$ à l'extérieur des racines qui sont égales à $\dfrac{4-8}{8} = -\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{4+8}{8} = \dfrac{3}{2}$.

x	$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$4x^2-4x-3$	‖	$-$	0	$+$	
$(2x-1)^2$	‖	$+$		$+$	
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$\frac{5}{2}$	↗	$+\infty$

▶ Exercice n°9

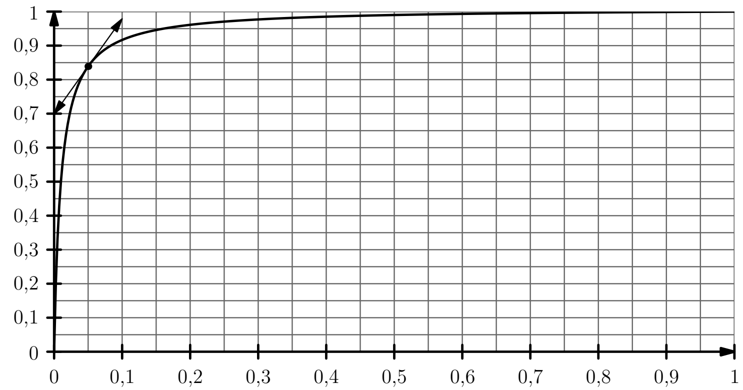
Dans une population donnée, on note x la proportion de personnes atteintes de la grippe (on a donc $x \in [0\,;1[$).

Un fabricant propose un test de dépistage et affirme qu'avec son test la probabilité d'avoir la grippe lorsque le test est positif est donnée par la fonction f définie sur $[0\,;1[$ par $f(x) = \dfrac{99x}{98x+1}$ où x est la proportion de personnes atteintes de la grippe.

1. $f(0{,}01) = 0{,}5$. L'affirmation est vraie.
2. $f'(x) = \dfrac{99\times(98x+1)-99x\times98}{(98x+1)^2} = \dfrac{99}{(98x+1)^2} > 0$ sur $[0\,;1[$. f est bien strictement croissante sur $[0\,;1[$.

3. Cela revient à chercher les x dans $[0\,;\,1[$ tels que $\dfrac{99x}{98x+1} > 0{,}9$
$\Leftrightarrow 99x > 0{,}9\,(98x+1)$ (car $98x+1>0$)
$\Leftrightarrow 99x > 88{,}2x + 0{,}9 \Leftrightarrow 10{,}8x > 0{,}9 \Leftrightarrow x > \dfrac{0{,}9}{10{,}8} \approx 0{,}083$.

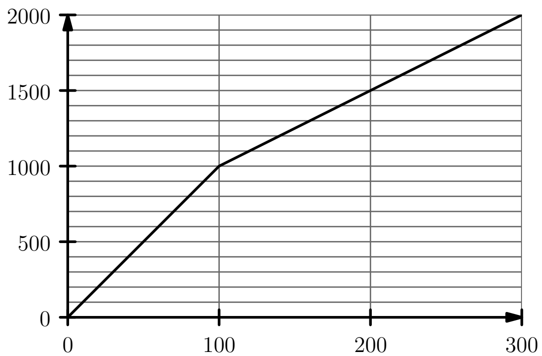
4. a) $f\,'(0{,}05) \approx 2{,}8$



   b) La dérivée ne pouvant pas s'annuler, la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1 ne peut pas être horizontale (ni aucune autre tangente d'ailleurs) ?

► Exercice n°10

1. Pour les 100 premiers km, il faut payer $100 \times 10 = 1000$ et pour les 100 derniers km, il faut débourser $100 \times 5 = 500$.
2. • Si $0 \leqslant x \leqslant 100$ alors $f(x) = 10x$
   • Si $100 < x$ alors $f(x) = 1000 + 5(x - 100) = 5x + 500$
3.



f est continue en 100 car $5 \times 100 + 500 = 10 \times 100$, donc f est continue sur $[0; +\infty[$.

► Exercice n°11

1. f est une fonction polynôme.
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} -x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} -x^3 = -\infty$.
2. $f\,'(x) = -3x^2 + 18x - 24$. $\Delta = 18^2 - 4 \times (-3) \times (-24) = 36 > 0$.
Du signe de $a = -3$ à l'extérieur des racines qui sont égales à $\dfrac{-18-6}{-6} = 4$ et $\dfrac{-18+6}{-6} = 2$.

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
$f\,'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-8	$\nearrow$	-4	$\searrow$	$-\infty$

3. Cela revient à déterminer les x tels que $f\,'(x) = -9 \Leftrightarrow -3x^2 + 18x - 15 = 0$.
$\Delta = 18^2 - 4 \times (-3) \times (-15) = 144$. Racines : $\dfrac{-18-12}{-6} = 5$ et $\dfrac{-18+12}{-6} = 1$.
Les points d'abscisse 5 et 1 conviennent.
4. a) f est continue et strictement décroissante sur $[0\,;\,1]$ et 0 est bien compris entre $f(0) = 12$ et $f(1) = -4$, donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution x_0 dans $[0\,;\,1]$.
   b) La calculatrice indique que $0{,}6 < x_0 < 0{,}7$, donc 0,6 est une valeur approchée par défaut de x_0 à 0,1 près.
5. a) $f\,''(x) = -6x + 18$.
   b)

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f\,''(x)$		$+$	0	$-$	
convexité de f		convexe		concave	

   c) D'après le tableau ci-dessus, $f\,''$ s'annule en changeant de signe pour $x = 3$. Donc le point I d'abscisse 3 et d'ordonnée $f(3) = -6$ est un point d'inflexion.

d) $y = f(3) + f'(3)(x-3) \Leftrightarrow y = -6 + 3(x-3) \Leftrightarrow y = 3x - 15$

► **Exercice n°12**

1. $C'(x) = 3x^2 - 24x + 72$, donc $C''(x) = 6x - 24$.

x	0	4	10
$C''(x)$	$-$	0	$+$
convexité de C	concave		convexe

2. • Quand la fonction « coût total » C est convexe sur un intervalle alors la fonction « coût marginal » C' est *croissante* sur cet intervalle.
   • Quand la fonction « coût total » C est concave sur un intervalle alors la fonction « coût marginal » C' est *dcroissante* sur cet intervalle.