2. Opérations sur les inégalités

Règle 1

Si on ajoute, ou retranche, un même réel aux deux membres d'une inégalité, on obtient une inégalité de même sens : $x \leqslant y \Leftrightarrow x + a \leqslant y + a$

▶ *Exemples :*

1) $x \leqslant 4 \Leftrightarrow x + 2 \leqslant \dots\dots\dots$

2) $x \leqslant -5 \Leftrightarrow x - 4 \leqslant \dots\dots\dots$

3) $x - 3 \leqslant 7 \Leftrightarrow x \leqslant \dots\dots\dots$

4) $x + 6 \leqslant 1 \Leftrightarrow x \leqslant \dots\dots\dots$

Règle 2

Si on ajoute membre à membre deux inégalités de même sens on obtient une inégalité de même sens : Si $x \leqslant y$ et $x' \leqslant y'$ alors $x + x' \leqslant y + y'$

▶ *Exemples :*

1) Si $x \leqslant -1$ et $x' \leqslant \dfrac{1}{2}$ alors $x + x' \leqslant \dots\dots\dots$

2) Si $\dfrac{3}{4} \leqslant x$ et $-2 \leqslant x'$ alors $\dots\dots\dots \leqslant x + x'$

▶ **Attention :** ne jamais soustraire membre à membre deux inégalités (contre-exemple : on a bien $5 \leqslant 7$ et $4 \leqslant 9$ mais $(5 - 4)$ n'est pas inférieur à $(7 - 9)$)

Règle 3

Si on multiplie, ou divise, par un même réel **strictement positif** les deux membres d'une inégalité, on obtient une inégalité de **même sens** : Pour tout $k > 0$, $x \leqslant y \Leftrightarrow kx \leqslant ky$

▶ *Exemples :*

1) $x \leqslant 2 \Leftrightarrow 2x \leqslant \dots\dots\dots$

2) $x \leqslant -3 \Leftrightarrow \dfrac{2}{3}x \leqslant \dots\dots\dots$

3) $\dfrac{7}{2} \leqslant x \Leftrightarrow \dots\dots\dots \leqslant 8x$

4) $3x \leqslant -6 \Leftrightarrow x \leqslant \dots\dots\dots$

5) $\dfrac{3}{4}x \leqslant 6 \Leftrightarrow x \leqslant \dots\dots\dots$

6) $\sqrt{3}x \leqslant -2 \Leftrightarrow x \leqslant \dots\dots\dots$

Règle 4

Si on multiplie, ou divise, par un même réel **strictement négatif** les deux membres d'une inégalité, on obtient une inégalité de **sens contraire** : Pour tout $k < 0$, $x \leqslant y \Leftrightarrow kx \geqslant ky$

▶ *Exemples :*

1) $x \leqslant 5 \Leftrightarrow 3x\ \dots\dots\dots$

2) $x \leqslant -\dfrac{8}{3} \Leftrightarrow -\dfrac{3}{4}x \dots\dots\dots$

3) $x \leqslant 3\sqrt{2} \Leftrightarrow -x \dots\dots\dots$

4) $-2x \leqslant 6 \Leftrightarrow x \dots\dots\dots$

5) $-x \geqslant \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow x \dots\dots\dots$

6) $-\dfrac{9}{8}x \leqslant 18 \Leftrightarrow x \dots\dots\dots$

Règle 5

Pour tous réels x et y **strictement positifs** :

$$\text{Si } x \leqslant y \text{ alors } \begin{cases} x^2 \leqslant y^2 \text{ (même sens)} \\ \sqrt{x} \leqslant \sqrt{y} \text{ (même sens)} \\ \dfrac{1}{x} \geqslant \dfrac{1}{y} \text{ (sens contraire)} \end{cases}$$

▶ *Exemples :*

1) Si $0 < x \leqslant 2$ alors $x^2 \dots\dots\dots$; $\sqrt{x} \dots\dots\dots$ et $\dfrac{1}{x} \dots\dots\dots$

2) Si $x \geqslant \dfrac{3}{4}$ alors $x^2 \dots\dots\dots$; $\sqrt{x} \dots\dots\dots$ et $\dfrac{1}{x} \dots\dots\dots$

3. Opérations sur les encadrements

Règle 6

On peut toujours ajouter membre à membre un encadrement :

$$\text{Si } \begin{cases} a \leqslant x \leqslant b \\ a' \leqslant y \leqslant b' \end{cases} \text{ alors } a + a' \leqslant x + y \leqslant b + b'$$

▶ *Exemple :* Si $\begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 3 \\ 5 \leqslant y \leqslant 9 \end{cases}$ alors .... $\leqslant x + y \leqslant$ ....

RÈGLE 7

Si tous les nombres sont **positifs**, on peut multiplier membre à membre un encadrement :

Si a et a' sont positifs et si $\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b \\ a' \leqslant y \leqslant b' \end{cases}$ alors $aa' \leqslant xy \leqslant bb'$

▶ *Exemple :* Si $\begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant \dfrac{3}{2} \\ \sqrt{2} \leqslant y \leqslant 4 \end{cases}$ alors .... $\leqslant xy \leqslant$ ....

RÈGLE 8

Encadrement de l'opposé : Si $a \leqslant x \leqslant b$ alors $-b \leqslant -x \leqslant -a$

▶ *Exemple :* Si $-6 \leqslant x \leqslant 2$ alors .... $\leqslant -x \leqslant$ ....

RÈGLE 9

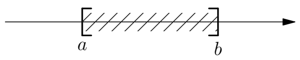
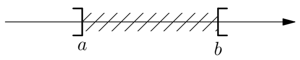
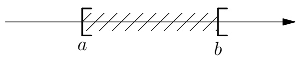
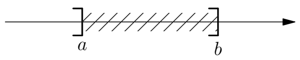
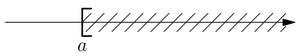
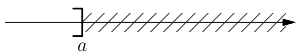
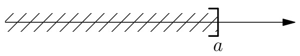
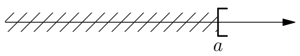
Pour tous réels a, x et b **strictement positifs** :

Si $a \leqslant x \leqslant b$ alors $\begin{cases} a^2 \leqslant x^2 \leqslant b^2 \text{ (bormnes dans le même ordre)} \\ \sqrt{a} \leqslant \sqrt{x} \leqslant \sqrt{b} \text{ (bornes dans le même ordre)} \\ \dfrac{1}{b} \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{a} \text{ (bornes dans l'ordre contraire)} \end{cases}$

▶ *Exemple :* Si $2 \leqslant x \leqslant 5$ alors $\begin{cases} \ldots\ldots\ldots \leqslant x^2 \leqslant \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \leqslant \sqrt{x} \leqslant \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant \ldots\ldots\ldots \end{cases}$

▶ **Attention :** ne jamais soustraire ou diviser membre à membre deux encadrements.

4. Intervalles

Intervalle	Définition	Schéma sur la droite des réels	Borne
$[a\ ;\ b]$	tous les x tels que		fermée en a et en b
$]a\ ;\ b[$	tous les x tels que		ouverte en a et en b
$[a\ ;\ b[$	tous les x tels que		fermée en a et ouverte en b
$]a\ ;\ b]$	tous les x tels que		ouverte en a et fermée en b
$[a\ ;\ +\infty[$	tous les x tels que		fermée en a et ouverte en $+\infty$
$]a\ ;\ +\infty[$	tous les x tels que		ouverte en a et en $+\infty$
$]-\infty\ ;\ a]$	tous les x tels que		fermée en a et ouverte en $-\infty$
$]-\infty\ ;\ a[$	tous les x tels que		ouverte en a et en $-\infty$