Géométrie analytique

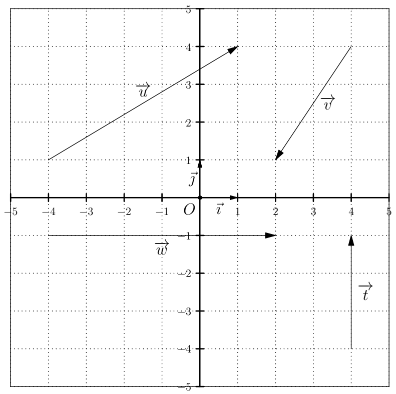
▶ Exercice n°1

Le plan étant muni d'une base $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, compléter les équivalences suivantes :

1. $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{u} = (\ldots\ldots)\overrightarrow{i} + (\ldots\ldots)\overrightarrow{j}$
2. $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}\ldots\ldots\\\ldots\ldots\end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{u} = -4\overrightarrow{i} + 6\overrightarrow{j}$
3. $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}\ldots\ldots\\\ldots\ldots\end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{u} = -3\overrightarrow{j}$

▶ Exercice n°2

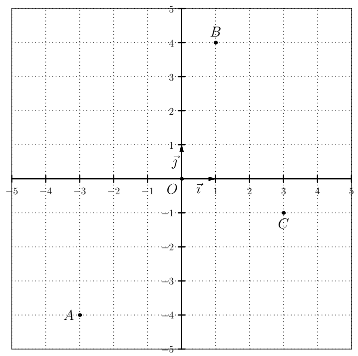
Le plan étant muni de la base $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, déterminer graphiquement les coordonnées de $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$; $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{t}$.



▶ Exercice n°3

Le plan étant muni de la base $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, placer sur le graphique ci-dessous :

1. Le représentant du vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ partant du point A.
2. Le représentant du vecteur $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}-3\\-6\end{pmatrix}$ partant du point B.
3. Le représentant du vecteur $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$ partant du point C.



▶ Exercice n°4

Soit $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{3}{4}\end{pmatrix}$ dans une base du plan.

Déterminer les coordonnées des vecteurs suivants :

$\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$; $\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}$; $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}$; $\frac{1}{2}\overrightarrow{u}+\overrightarrow{w}$; $3\overrightarrow{u}-2\overrightarrow{v}$; $4\overrightarrow{w}-\frac{1}{2}\overrightarrow{v}$

▶ Exercice n°5

Le plan étant muni d'une base, déterminer si les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires dans les cas suivants :

a) $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}8\\-4\end{pmatrix}$ b) $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\4\end{pmatrix}$

c) $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ d) $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\-1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}3\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$

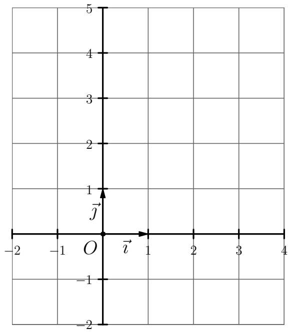
▶ Exercice n°6

Le plan étant muni d'une base orthonormée, calculer la norme de $\overrightarrow{u}$ dans les cas suivants :

a) $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}6\\8\end{pmatrix}$ b) $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-\sqrt{2}\\3\end{pmatrix}$ c) $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}\frac{3}{4}\\-1\end{pmatrix}$

▶ Exercice n°7

1. Dans le repère ci-dessous, placer les points $A\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$.



2. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CB}$.
3. Quelle est la nature du quadrilatère $OABC$?

▶ Exercice n°8

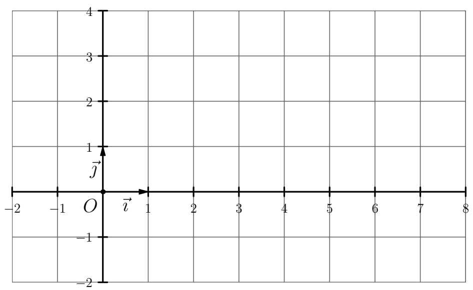
Dans le plan muni d'un repère, on considère les points $A\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$, ,$B\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$ et $D\begin{pmatrix}-6\\5\end{pmatrix}$. Déterminer les coordonnées des vecteurs suivants :

a) $\overrightarrow{AB}$ b) $\overrightarrow{AC}$ c) $\overrightarrow{BD}$

d) $3\overrightarrow{BC}$ e) $-2\overrightarrow{BC}+3\overrightarrow{AD}$ f) $2\,\overrightarrow{DB}-\dfrac{1}{2}\,\overrightarrow{AB}$

▶ Exercice n°9

1. Dans le repère ci-dessous, placer les points $A\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$.



2. Déterminer les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.
3. Déterminer les coordonnées du point E tel que $ADEC$ soit un parallélogramme.

▶ Exercice n°10

Dans le plan muni d'un repère, on considère les points $A\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}4\\-5\end{pmatrix}$.

1. Déterminer les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}$.
2. Déterminer les coordonnées du point N tel que N soit le milieu de $[AC]$.
3. Déterminer les coordonnées du point P tel que $2\,\overrightarrow{AB}+3\,\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{0}$.

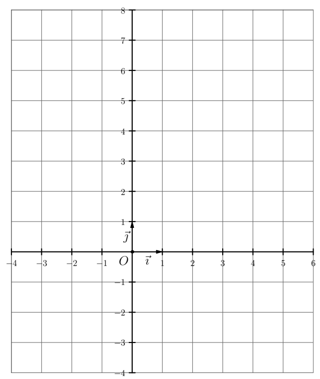
▶ Exercice n°11

Déterminer si les points A, B et C sont alignés ou non dans les cas suivants :

1. $A\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ $B\begin{pmatrix}7\\3\end{pmatrix}$ $C\begin{pmatrix}15\\5\end{pmatrix}$
2. $A\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$ $B\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ $C\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\3\end{pmatrix}$
3. $A\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$ $B\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$ $C\begin{pmatrix}\frac{17}{2}\\-5\end{pmatrix}$

▶ Exercice n°12

1. Dans le repère ci-dessous, placer les points $A\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix}$ et $D\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$.



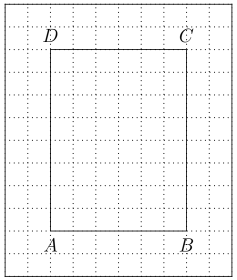
2. Calculer les coordonnées des points E et F tels que $\overrightarrow{BE} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF} = 3\,\overrightarrow{AD}$. Placer E et F.
3. Montrer que les points C, E et F sont alignés.
4. Calculer les distances AB, AC et BD.

▶ Exercice n°13

On considère les points $A\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix}$.
Montrer que le triangle ABC est rectangle en A et calculer son aire.

▶ Exercice n°14

Soit $ABCD$ un rectangle, I le milieu de $[AB]$, J le milieu de $[AD]$, M le point tel que $\overrightarrow{JM} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et N le point tel que $\overrightarrow{IN} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AD}$.



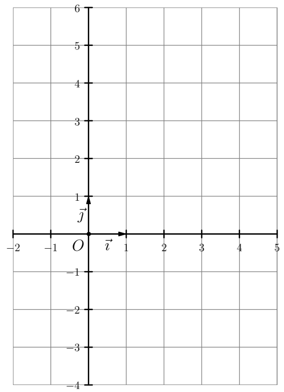
On se place dans le repère $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$.

1. Déterminer, sans calcul, les coordonnées des points I,J,M et N.
2. Montrer que les points A , M et N sont alignés et que les droites (DM) et (BN) sont parallèles.

▶ Exercice n°15

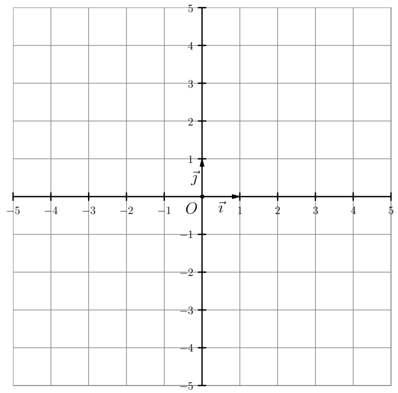
Tracer les droites suivantes dans le repère ci-dessous :

- d_1 passant par $A\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.
- d_2 passant par $B\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- d_3 passant par $C\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.



▶ Exercice n°16

Dans le repère ci-dessous, tracer les droites $d_1 : x+2y+4 = 0$, $d_2 : 2x-3y+3 = 0$, $d_3 : x = 4$ et $d_4 : y = 3$.



▶ Exercice n°17

Le plan étant muni d'un repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, déterminer une équation cartésienne de la droite d passant $A\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

▶ Exercice n°18

Le plan étant muni d'un repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, déterminer une équation cartésienne de la droite d passant par les points A et B dans les cas suivants :

a) $A\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$ b) $A\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix} 0 \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$

▶ Exercice n°19

Dans le plan muni d'un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère :

d la droite d'équation $-\sqrt{2}x+4y+1=0$ et d' la droite d'équation $4x-8\sqrt{2}y+3=0$.

1. Déterminer un vecteur directeur de d et d'.
2. Déterminer si les droites d et d' sont parallèles on non.

▶ Exercice n°20

Dans le plan muni d'un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère le point $A\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et d la droite d'équation $3x+2y-1=0$.

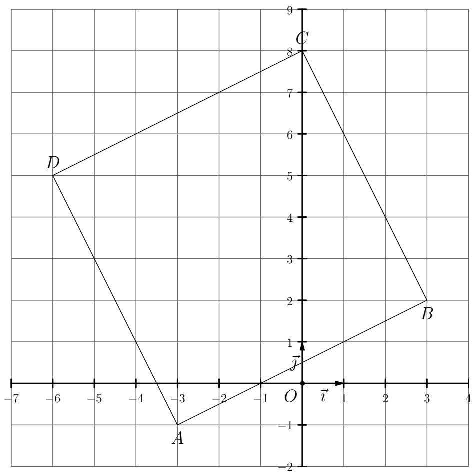
Déterminer une équation de la droite d' parallèle à d et passant par A.

▶ Exercice n°21

Dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère le carré $ABCD$ avec :

$A\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix}$ et $D\begin{pmatrix} -6 \\ 5 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les coordonnées des points F, E et G tels que :
   - F soit le milieu de $[AD]$;
   - $\overrightarrow{AE} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$;
   - $FAEG$ soit un parallélogramme.

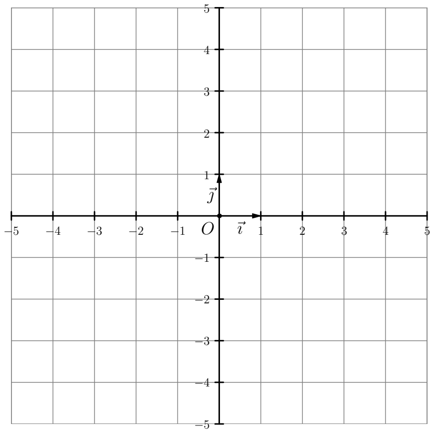


2. Déterminer une équation cartésienne des droites (DE) et (CG).
3. En déduire que le point $I\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ appartient aux droites (DE) et (CG).
4. Montrer que les points F, I et B sont alignés et que la droite (IB) est parallèle à l'axe des abscisses.
5. Déterminer une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}$ passant par le point I et parallèle à la droite (AB).
6. Déterminer les coordonnées du point J, intersection de la droite $\mathcal{D}$ et de l'axe des ordonnées.
7. Expliquer, sans calculs, pourquoi les droites (IJ) et (BC) sont perpendiculaires, ainsi que les droites (CJ) et (IB).
8. En déduire, sans calculs, que les droites (BJ) et (CG) sont perpendiculaires.

▶ Exercice n°22

Dans le repère ci-dessous, tracer les droites suivantes :

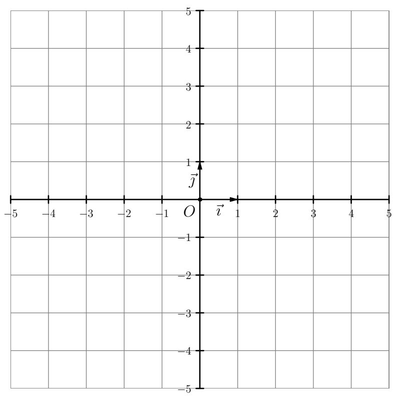
$d_1 : y = x$; $d_2 : y = 2x+3$; $d_3 : y = -\dfrac{1}{2}x+4$; $d_4 : y = -4$ et $D_5 : x = -3$.



▶ Exercice n°23

Dans le repère ci-dessous, tracer les droites suivantes :

- d_1 passant par $A\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ et de coefficient directeur égal à -1.
- d_2 passant par $B\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et de coefficient directeur égal à 0.
- d_3 passant par $C\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et de coefficient directeur égal à 3.



► Exercice n°24

Déterminer l'équation réduite de la droite passant par A et B dans les cas suivants :

a) $A\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix}7\\-1\end{pmatrix}$ b) $A\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$

c) $A\begin{pmatrix}-5\\-2\end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-3\end{pmatrix}$ d) $A\begin{pmatrix}-1\\\sqrt{2}\end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix}0\\2\sqrt{2}\end{pmatrix}$

e) $A\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{4}\end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$ f) $A\begin{pmatrix}\frac{5}{2}\\-1\end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix}-2\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

► Exercice n°25

Déterminer l'équation réduite de la droite d' parallèle à d et passant par A dans les cas suivants :

a) $d : y = -2x + \frac{1}{2}$; $A\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}$ b) $d : y = -\frac{3}{2}x + 1$; $A\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$

c) $d : y = 1$; $A\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ d) $d : x = 4$; $A\begin{pmatrix}7\\2\end{pmatrix}$

► Exercice n°26

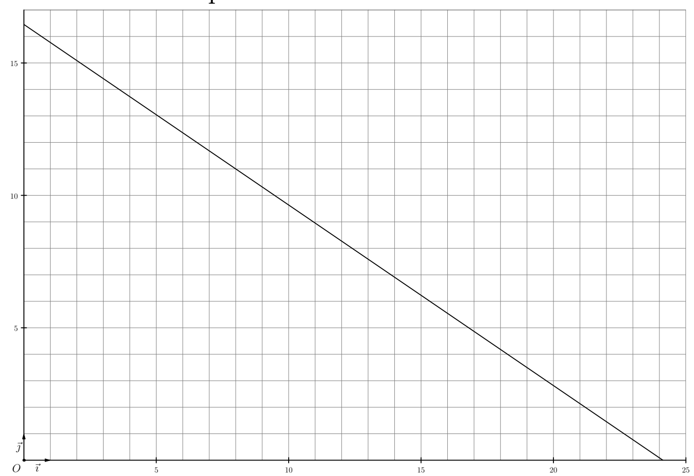
Durant une année un individu a acheté n DVD valant 15 euros pièce et p livres valant 22 euros pièce pour un montant total de 362 euros. On cherche à déterminer les valeurs possibles de n et p.

Première analyse du problème :

1. Quelle relation lie n et p ?
2. Justifier que n est nécessairement inférieur à 25.

Approche graphique :

1. Dans le plan muni d'un repère, on considère les points d'abscisse n et d'ordonnée p pouvant répondre au problème. Justifier que ces points sont situés sur une droite d dont on donnera une équation.
2. La droite d est représentée ci-dessous :



D'après le graphique, il semble que que l'on puisse avoir $n = 5$ et $p = 13$. Est-ce réellement le cas ?

Approche algorithmique :

Pour déterminer, de façon plus rigoureuse, les valeurs possibles de n et p, on cherche à utiliser un algorithme basé sur le principe suivant : *Pour toutes les abscisses entières x possibles sur la droite d, on calcule l'ordonnée y du point de la droite d'abscisse x et, si y est un entier, on affiche x.*

Compléter l'algorithme suivant pour qu'il réponde à la question :

```
Variables: x,y
DEBUT_ALGORITHME
  POUR x ALLANT_DE .... A .....
    y ← .............
    SI (y est un entier) ALORS
      AFFICHER x
      FIN_SI
    FIN_POUR
FIN_ALGORITHME
```