

Fonctions numériques

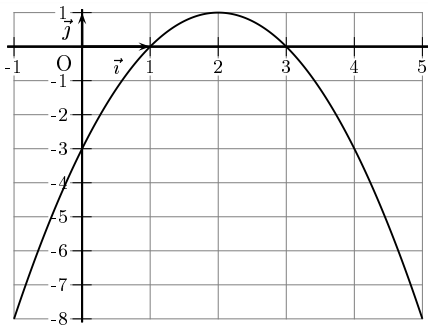
► Exercice n°1

Soit f la fonction définie sur $]2; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$.

- Calculer les images par f de 3 et 5.
- Déterminer les antécédents éventuels par f de 3.

► Exercice n°2

Soit f la fonction définie sur $[-1; 5]$ dont la courbe est donnée ci-dessous :



- Déterminer graphiquement les valeurs de $f(-1)$, $f(0)$ et $f(1)$.
- Déterminer graphiquement les antécédents de -3 par f .
- Dans quel intervalle varie $f(x)$ quand x varie dans $[-1; 5]$?

► Exercice n°3

On donne ci-dessous le tableau de variations d'une fonction f définie sur $[0; 7]$.

| | | | |
|--------|---|----|----|
| x | 0 | 4 | 7 |
| $f(x)$ | 2 | -3 | -1 |

Déterminer, en justifiant votre réponse, si les propositions ci-dessous sont vraies ou fausses :

- Proposition 1 : $f(2) \geq f(3)$
- Proposition 2 : $f(-3) = 4$
- Proposition 3 : $f(x)$ s'annule deux fois sur $[0; 7]$
- Proposition 4 : -3 est un minimum de f sur $[0; 7]$

► Exercice n°4

Déterminer si la fonction f est paire, impaire ou ni l'une ni l'autre dans les cas suivants

- f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 3x$
- f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 4 - x^2$
- f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2 + x$
- f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{3x}{x^2 + 4}$
- f définie sur $]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x-1}$

► Exercice n°5

f est une fonction paire définie sur $[-8; 8]$ dont une moitié du tableau de variations est donné ci-dessous :

| | | | | | |
|--------|----|----|----|---|---|
| x | -8 | -2 | 0 | 2 | 8 |
| $f(x)$ | -5 | 1 | -2 | | |

Compléter l'autre moitié.

► Exercice n°6

f est une fonction impaire définie sur $[-6; 6]$ dont une moitié du tableau de variations est donné ci-dessous :

| | | | | | |
|--------|----|----|---|----|---|
| x | -6 | -3 | 0 | 3 | 6 |
| $f(x)$ | | | 0 | -1 | 3 |

Compléter l'autre moitié.

► Exercice n°7

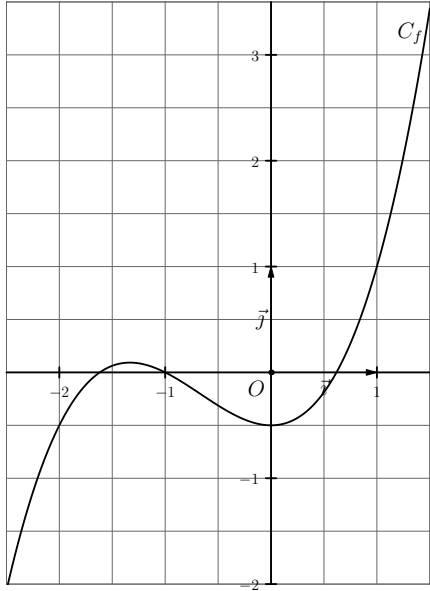
Soit f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 3x^2 + 4$.

- Déterminer l'image de -1 par f .
- Déterminer les antécédents éventuels de 16 par f .
- Justifier que f est paire.
- a) Pour tous réels a et b , montrer que $f(b) - f(a) = 3(b-a)(b+a)$.
b) Déterminer le sens de variation de f sur $[0; +\infty[$.

- c) En déduire, en utilisant que f est paire, le sens de variation de f sur $]-\infty; 0]$.
 d) Dresser le tableau de variations de f sur \mathbb{R} .

► **Exercice n°8**

Soit f la fonction définie sur $\left[-\frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right]$ dont la courbe est donnée ci-dessous :



1. Résoudre graphiquement dans $\left[-\frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right]$ les équations suivantes :

- a) $f(x) = 1$
 b) $f(x) = -\frac{1}{2}$
 c) $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

2. Résoudre graphiquement dans $\left[-\frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right]$ les inéquations suivantes :

- a) $f(x) \geq 1$
 b) $f(x) < -\frac{1}{2}$
 c) $f(x) \leq -\frac{1}{2}$

d) $f(x) \geq \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

► **Exercice n°9**

Déterminer la fonction affine f telle que $f(1) = -2$ et $f(4) = 7$.

► **Exercice n°10**

- On connaît la correspondance suivante : 0° celsius correspond à 32° fahrenheit et 100° celsius correspond à 212° fahrenheit. Sachant que la fonction f qui à x , la température en degrés celsius, associe $f(x)$, la température en degrés fahrenheit, est une fonction affine, calculer $f(x)$ en fonction de x .
- En déduire la valeur en degrés fahrenheit de 22° celsius.

► **Exercice n°11**

Soit f la fonction définie sur $]-2; +\infty[$ par $f(x) = \frac{5x}{x+2}$.

Étudier la position relative de la courbe C_f et de la droite D d'équation $y = 5$.

► **Exercice n°12**

Soit f la fonction définie sur $]-\infty; -1[$ par $f(x) = \frac{x}{x+1}$.

Étudier la position relative de la courbe C_f et de la droite D d'équation $y = x$.

► **Exercice n°13**

On introduit 50 000 poissons dans un lac artificiel . On estime que la population de poissons varie en fonction du temps et que, t années après la mise à l'eau le nombre de poissons, en milliers d'unités, est donné par la formule :

$$P(t) = \frac{50 + 60t}{1 + 0,05t}$$

- Quelle sera la population au bout d'un an, au bout de 50 ans ? (on donnera le résultat à une centaine près)
- Au bout de combien d'années la population aura-t-elle été multipliée par 4 ?
- Compléter l'algorithme ci-dessous pour qu'il affiche la population estimée de poissons tous les 5 ans sur les 100 premières années :

```

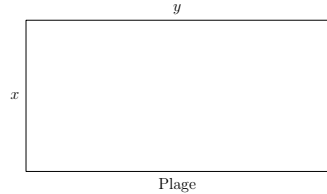
Variables: t
1: DEBUT_ALGORITHME
2:   t ← 5
3:   TANT_QUE (t.....100) FAIRE
4:     AFFICHER (50 + 60t)/(1 + 0,05t)
5:     t ← t + 5
6:   FIN_TANT_QUE
7: FIN_ALGORITHME
  
```

4. Étudier le signe de $P(t) - 1200$ suivant les valeurs de t . Que peut-on en conclure ?

► **Exercice n°14**

Un maître nageur dispose d'un cordon flottant de 360 m de longueur pour délimiter un rectangle de baignade surveillée.

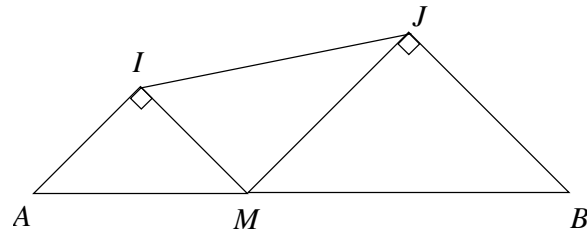
On note x et y les dimensions, en mètres, de ce rectangle et $S(x)$ son aire en m^2 (le cordon n'est composé en lui-même que des 3 côtés du rectangle qui sont dans l'eau).



1. Calculer l'aire $S(x)$ pour $x = 25$ et pour $x = 42$.
2. Exprimer $S(x)$ en fonction de x .
3. Déterminer les réels a et b tels que, pour tout x , $S(x) = -2(x - a)^2 + b$.
4. En déduire la valeur de x pour laquelle l'aire est-elle maximale? Quelle est la valeur de cette aire maximale?

► **Exercice n°15**

Dans la figure ci-dessous, $[AB]$ est un segment de longueur 10, M est un point variable de $[AB]$ distinct de A et B et AMI et BMJ sont deux triangles rectangles et isocèles. On pose $x = AM$.



1. Exprimer IM^2 et MJ^2 en fonction de x .
2. Justifier le fait que le triangle IMJ soit aussi rectangle.
3. On note $f(x)$ la distance IJ . Exprimer $f(x)$ en fonction de x .
4. Déterminer les réels a et b tels que pour tout $x \in]0,10[$, $f(x) = \sqrt{(x - a)^2 + b}$.
5. En déduire la valeur minimale que peut prendre IJ ? Pour quelle position de M est-elle atteinte?
6. Déterminer les valeurs exactes de x pour lesquelles on a $IJ = 6$.

► **Exercice n°16**

On considère la proposition suivante : « Si f est une fonction croissante sur \mathbb{R} alors, pour tout x , $f(x)$ est positif ».

1. Exprimer la **négation** de cette proposition.
2. Exprimer la **réciproque** de cette proposition.
3. La proposition est-elle vraie?
4. La réciproque de la proposition est-elle vraie?