Calcul numérique et algébrique

▶ Exercice n°1
Mettre une croix dans les cases qui conviennent :

	entier	décimal	rationnel	irrationnel
3,5				
$\frac{42}{7}$				
$\frac{3}{4}$				
$\frac{6}{7}$				
$\sqrt{5}$				
$\sqrt{81}$				
0,00032				

▶ Exercice n°2
Compléter les phrases suivantes par « multiple » ou « diviseur » :

1. 75 est un .... de 5.
2. 11 est un .... de 99.
3. 3 est un .... de 243.

▶ Exercice n°3
Compléter les phrases suivantes :

1. Si le chiffre des unités d'un nombre entier est 0, 2, 4, 6 ou 8 alors ce nombre est divisible par ....
2. Si le chiffre des unités d'un nombre entier est 0 ou 5 alors ce nombre est divisible par ....
3. Si la somme des chiffres d'un nombre entier est divisible par 3 alors ce nombre est divisible par ....
4. Si la somme des chiffres d'un nombre entier est divisible par 9 alors ce nombre est divisible par ....

▶ Exercice n°4

1. Déterminer les cinq premiers multiples de 54.
2. Déterminer les cinq premiers multiples de 90.
3. Deux bus A et B quittent une station en même temps. Le bus A revient à la station toutes les 54 minutes et le bus B toutes les 90 minutes. Au bout de combien de temps les deux bus se retrouveront-ils ensemble à cette station pour la première fois ?

▶ Exercice n°5
Déterminer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses :

	V	F
$3^3 \times 6$ est une décomposition de 162 en produit de facteurs premiers		
$2^4 \times 5$ est une décomposition de 80 en produit de facteurs premiers		
$\frac{18}{24}$ est une fraction irréductible		
$\frac{13}{24}$ est une fraction irréductible		
$\frac{25}{26} = \frac{5}{6}$		

▶ Exercice n°6
Écrire le résultat des opérations suivantes sous la forme d'une fraction irréductible :

a) $\dfrac{1}{3} + \dfrac{5}{2}$ b) $\dfrac{1}{4} + \dfrac{4}{3}$ c) $-\dfrac{2}{3} + \dfrac{5}{6}$

d) $\dfrac{5}{12} - \dfrac{5}{8}$ e) $\dfrac{7}{8} \times \dfrac{6}{13}$ f) $5 - \left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{5}{2}\right)$

g) $\dfrac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}$ h) $\dfrac{-3}{\frac{2}{3} - \frac{8}{7}}$ i) $\dfrac{\frac{6}{35}}{\frac{3}{5}}$

▶ Exercice n°7
Réduire au même dénominateur et simplifier les expressions suivantes :

a) $3x + \dfrac{1}{x}$ b) $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{4}{x}$ c) $\dfrac{2}{x} - \dfrac{x}{2}$

d) $\dfrac{1}{a} + \dfrac{2}{b}$ e) $\dfrac{b+1}{ab} - \dfrac{4}{a}$ f) $\dfrac{x}{x+1} - \dfrac{1}{2}$

▶ Exercice n°8

Développer les expressions suivantes en utilisant les identités remarquables :

a) $(x+7)^2$ b) $(3x+4)^2$ c) $(x-6)^2$

d) $(1-4x)^2$ e) $\left(\frac{1}{2}x+1\right)^2$ f) $(2x-7)(2x+7)$

g) $\left(\frac{1}{3}x-4\right)\left(\frac{1}{3}x+4\right)$ h) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$ i) $(3-\sqrt{2})^2$

j) $\left(\sqrt{3}-\frac{1}{2}\right)^2$ k) $(\sqrt{5}-2\sqrt{2})(\sqrt{5}+2\sqrt{2})$ l) $(3x+1)^2+(5x-4)^2$

▶ Exercice n°9

Factoriser les expressions suivantes en utilisant les identités remarquables :

a) x^2-49 b) $x^2-\frac{1}{4}$ c) $4x^2-1$

d) $\frac{9}{4}x^2-16$ e) x^2-3 f) $(x+1)^2-4$

g) $(2x-1)^2-(3x+2)^2$ h) x^2+2x+1 i) x^2+6x+9

j) $9x^2-12x+4$ k) $9x^2-6x+1$ l) $\frac{1}{4}x^2-x+1$

▶ Exercice n°10

Factoriser les expressions suivantes en cherchant le meilleur facteur commun :

a) x^2-x b) $3(x+1)+(x+1)^2$

c) $(6x+3)-4x(2x+1)$ d) $3(2x-1)-(x+2)(4x-2)$

e) $4x^3-6x^2$ f) $(3x+3)^2-x(x+1)$

▶ Exercice n°11

Factoriser les expressions suivantes :

a) $x^2-4+(2x+3)(x-2)$ b) $4x(x^2-9)-x(x-3)$

c) $(2x+5)(4+2x)+4-x^2$ d) $(x-3)(2x-1)^2-(4x-12)$

▶ Exercice n°12

1. Montrer que $(x-1)^2-4=x^2-2x-3$. En déduire une factorisation de x^2-2x-3.
2. Compléter l'égalité : $x^2+2x-8=(x+\ldots\ldots)^2-\ldots\ldots$. En déduire une factorisation de x^2+2x-8.
3. Compléter l'égalité : $x^2-4x-5=(x-\ldots\ldots)^2-\ldots\ldots$. En déduire une factorisation de x^2-4x-5.

▶ Exercice n°13

Compléter les égalités suivantes :

a) $10^{\cdots}\times10^5=10^{-3}$ b) $10^{\cdots}\times10^{-4}=10^7$ c) $\frac{10^{\cdots}}{10^{-3}}=10^{-1}$

d) $\frac{10^4}{10^{\cdots}}\times10^{-6}=10^5$ e) $0{,}003\times10^{-5}=3\times10^{\cdots}$ f) $123{,}12\times10^{\cdots}=1{,}2312\times10^{-5}$

▶ Exercice n°14

1. Exprimer l'expression suivante avec une seule puissance de 2 : $2^4\times2^8\times\left(2^{-5}\right)^3$
2. Exprimer l'expression suivante avec une seule puissance de 3 : $\frac{3^{-24}\times\left(3^4\right)^7}{3^5}$
3. Exprimer l'expression suivante avec une seule puissance de 3 : $\left(-3^4\right)^2\times9^6\times27^{-2}$
4. Exprimer l'expression suivante avec uniquement des puissances de 3 et 10 : $\frac{\left(3^3\times10^{-3}\right)^2}{3\times10^{-8}}$
5. Exprimer l'expression suivante avec uniquement des puissances de 2, 3 et 5 : $\frac{(-18)^2\times5}{15^2\times3}$

▶ Exercice n°15

Écrire en notation scientifique les réels suivants :

a) $15{,}8\times10^2$ b) $135{,}33\times10^{-3}$ c) $0{,}002\times10^{-5}$

d) $0{,}071\times10^5$ e) $123{,}12\times10^3$ f) $-0{,}000134\times10^{-7}$

▶ Exercice n°16
Á l'aide de la calculatrice, calculer les nombres suivants et donner les résultats en notation scientifique :

a) $\left(1{,}21 \times 10^{-3}\right)^2$ b) $\left(1{,}67265 \times 10^{-27}\right) \times \left(6{,}023 \times 10^{23}\right)$

c) $\dfrac{\left(5{,}04 \times 10^{31}\right)^2}{2{,}14 \times 10^{23}}$

▶ Exercice n°17
On assimile une boite de soda de 33 cL et de hauteur 115 mm à un cylindre. Sachant que le volume V d'un cylindre de rayon R et de hauteur h est égal à $V = \pi R^2 h$, calculer le rayon (à 1 mm près) de la boite de soda.

▶ Exercice n°18
Simplifier l'écriture des réels suivants :

a) $\left(\sqrt{7}\right)^2$ b) $\left(-2\sqrt{3}\right)^2$ c) $\left(-4\sqrt{5}\right)^2$

d) $\left(2\sqrt{2}\right)^3$ e) $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$ f) $\dfrac{12\sqrt{5}}{\sqrt{3} \times \sqrt{15}}$

▶ Exercice n°19
Développer et simplifier les expressions suivantes :

a) $\left(\sqrt{7} - \sqrt{3}\right)\left(\sqrt{7} + \sqrt{3}\right)$ b) $\left(2\sqrt{5} + 1\right)\left(2\sqrt{5} - 1\right)$

c) $\left(\sqrt{3} + \sqrt{5}\right)^2 + \left(\sqrt{15} - 1\right)^2$ d) $\left(\sqrt{4 - \sqrt{7}} + \sqrt{4 + \sqrt{7}}\right)^2$

▶ Exercice n°20
Écrire sans racine au dénominateur les nombres suivants :

a) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ b) $-\dfrac{2}{\sqrt{7}}$ c) $\dfrac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

d) $\dfrac{1}{\sqrt{6} - \sqrt{5}}$ e) $\dfrac{1}{3 - \sqrt{2}}$ f) $\dfrac{-\sqrt{3}}{\sqrt{7} - \sqrt{3}}$

▶ Exercice n°21
Montrer que pour tout réel x positif différent de 1, on a : $\dfrac{1}{\sqrt{x} + 1} - \dfrac{1}{\sqrt{x} - 1} = \dfrac{2}{1 - x}$

▶ Exercice n°22
Les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle ont pour dimension $2\sqrt{2}$ et $2 - \sqrt{2}$. Calculer les valeurs exactes de son hypoténuse et de son périmètre.

▶ Exercice n°23

1. Soit n un entier impair et k l'entier tel que $n = 2k + 1$.
   a) Développer $(2k + 1)^2$.
   b) n^2 est-il pair ou impair ?
   c) Compléter les phrases suivantes :
   « Le carré d'un entier impair est forcément .... Donc si la carré d'un entier est pair, cet entier est forcément .... »
2. On cherche à montrer que $\sqrt{2}$ ne peut pas être rationnel en montrant que si $\sqrt{2}$ pouvait être égal à une fraction irréductible $\dfrac{p}{q}$ (p et q entiers) on aboutirait à une contradiction.
   a) Montrer que si $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$ alors on aurait $p^2 = 2q^2$ et donc que p^2 et p seraient pairs.
   b) En remplaçant p par $2k$ dans $p^2 = 2q^2$, montrer que si p était pair alors q^2 et q le seraient aussi. La fraction $\dfrac{p}{q}$ pourrait-elle être alors irréductible ?

▶ Exercice n°24
Montrer que le produit de deux entiers impairs est forcément impair.

▶ Exercice n°25

1. Que fait l'algorithme ci-dessous :

```
Variables: i
DEBUT_ALGORITHME
  POUR i ALLANT_DE 1 A 10
    AFFICHER i^3
    FIN_POUR
FIN_ALGORITHME
```

2. Que fait ce deuxième algorithme :

```
Variables: i
DEBUT_ALGORITHME
  i ← 1
  TANT_QUE (i^3 < 500) FAIRE
    i ← i+1
    FIN_TANT_QUE
  AFFICHER i
FIN_ALGORITHME
```