Géométrie analytique - 2nde

https://www.xm1math.net

1. Coordonnées d'un vecteur dans une base

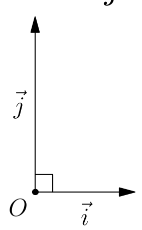
a) Bases et repères

Définition

- On appelle **base** du plan tout couple $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$ de vecteurs non colinéaires du plan.
- On appelle **repère** du plan tout triplet $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ où O est un point du plan, appelé origine du repère, et $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$ est une base.

Remarque(s)

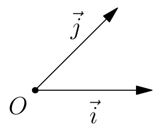
- $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ et $\left(O,\vec{j},\vec{i}\right)$ ne représentent pas le même repère.
- Si $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonaux, le repère est dit orthogonal.



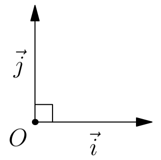
1. Coordonnées d'un vecteur dans une base

Remarque(s)

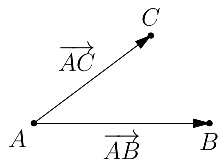
- Si $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont de même longueur, le repère est dit normé.



- Si $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonaux et de même longueur, le repère est dit orthonormé (ou orthonormal).



- Si A, B et C sont trois points non alignés alors $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ forme un repère du plan.

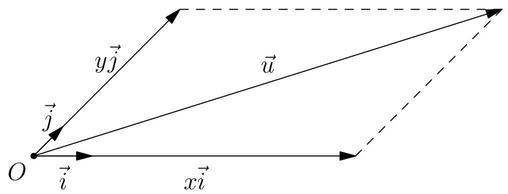


1. Coordonnées d'un vecteur dans une base

b) Décomposition d'un vecteur dans une base

Théorème (admis)

Dans une base $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ tout vecteur $\vec{u}$ se décompose de façon unique comme la somme d'un vecteur colinéaire à $\vec{i}$ et d'un vecteur colinéaire à $\vec{j}$.
Autrement dit, pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe deux réels uniques x et y tels que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.



c) Coordonnées d'un vecteur dans une base

Définition

On appelle **coordonnées** d'un vecteur $\vec{u}$ dans une base $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ l'unique couple de réels (x, y) tels que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$. x est appelé **abscisse** de $\vec{u}$ et y est appelé **ordonnée** de $\vec{u}$.

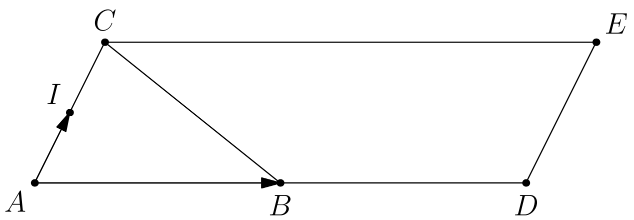
Notation : $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ou $\vec{u}(x, y)$.

Autrement dit, $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$

1. Coordonnées d'un vecteur dans une base

Exemple(s)

Dans la figure ci-dessous, $ADEC$ est un parallélogramme, B est le milieu de $[AD]$ et I est le milieu de $[AC]$.



$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AI}$ étant non colinéaires, $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI}\right)$ forme un repère du plan et on a :

- $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AI}$. Ce qui équivaut à dire que $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AI}$. Ce qui équivaut à dire que $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{DI} = -2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AI}$. Ce qui équivaut à dire que $\overrightarrow{DI}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

1. Coordonnées d'un vecteur dans une base

Propriété(s)

Dans une base $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$:

- *Dire que deux vecteurs sont égaux équivaut à dire qu'ils ont la même abscisse et la même ordonnée.*
- *Si* $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *et* $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ *alors on a* $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}$ *et* $\vec{u}-\vec{v}\begin{pmatrix} x-x' \\ y-y' \end{pmatrix}$.
- *Si* $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *alors, pour tout réel* k*, on a* $k\vec{u}\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$.

Exemple(s)

Dans une base $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$, si $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ alors :

$\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow 1+(-3) \\ \leftarrow 2+0 \end{matrix}$; $-4\vec{u}\begin{pmatrix} -4 \\ -8 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow -4\times 1 \\ \leftarrow -4\times 2 \end{matrix}$;

$3\vec{u}-2\vec{v}\begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow 3\times 1 - 2\times(-3) \\ \leftarrow 3\times 2 - 2\times 0 \end{matrix}$

1. Coordonnées d'un vecteur dans une base

d) Déterminant de deux vecteurs dans une base

Définition

Dans une base $(\vec{i},\vec{j})$, on appelle **déterminant** des vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ le réel noté $\det(\vec{u},\vec{v})$ défini par : $\det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = x \times y' - y \times x'$

Exemple(s)

- Si $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ alors $\det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \times 4 - 1 \times 3 = 5$
- Si $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$ alors $\det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = -1 \times (-6) - 2 \times 3 = 0$
- Si $\vec{u}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ alors $\det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix} \sqrt{2} & 3 \\ 1 & \sqrt{2} \end{vmatrix} = \sqrt{2} \times \sqrt{2} - 1 \times 3 = -1$

xm1math.net

1. Coordonnées d'un vecteur dans une base

e) Condition de colinéarité de deux vecteurs dans une base

Propriété(s)

Dans une base $(\vec{i},\vec{j})$, dire que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires équivaut à dire que $det(\vec{u},\vec{v}) = 0$.

Démonstration , par double implication, dans le cas de deux vecteurs non nuls :

- Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires, c'est que par définition, il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v} \Rightarrow x = kx'$ et $y = ky' \Rightarrow \det(\vec{u},\vec{v}) = x \times y' - y \times x' = kx' \times y' - ky' \times x' = 0$.
- Si $\det(\vec{u},\vec{v}) = 0$ alors on a $x \times y' - y \times x' = 0 \Rightarrow x \times y' = y \times x'$. En supposant que $x \neq 0$, on en déduit que $y' = \frac{x'}{x} \times y$. Or, comme on a aussi $x' = \frac{x'}{x} \times x$, on peut en conclure que $\vec{v} = \frac{x'}{x}\vec{u}$ et que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Exemple(s)

On a calculé, à l'exemple précédent, qu'avec $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$ on avait $\det(\vec{u},\vec{v}) = 0$.
On peut donc en conclure que ces deux vecteurs sont colinéaires.

xm1math.net

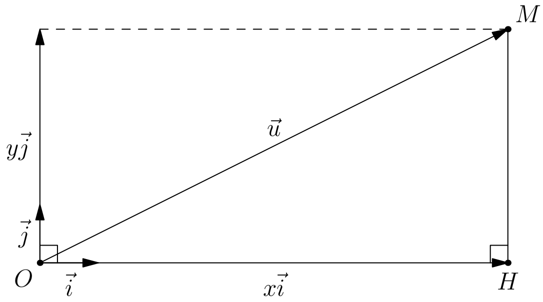
1. Coordonnées d'un vecteur dans une base

f) Norme d'un vecteur dans une base orthonormée

Propriété(s)

Dans une base ***orthonormée*** $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$, *si* $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *alors sa norme est* $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}$.

Piste de « démonstration » : soit O un point du plan, M le point tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$ et H le projeté orthogonal de M sur les abscisses.
Selon que x soit positif ou négatif, la distance OH est égale à x ou $-x$ et, selon que y soit positif ou négatif, la distance HM est égale à y ou $-y$. Dans tous les cas, $OH^2 = x^2$ et $HM^2 = y^2$. On en déduit que $OM^2 = x^2 + y^2$.



Exemple(s)

a) si $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{(-1)^2+2^2} = \sqrt{5}$ b) si $\vec{u}\begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}$ alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{(-4)^2+(-3)^2} = \sqrt{25} = 5$

c) si $\vec{u}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 3 \end{pmatrix}$ alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{\sqrt{2}^2+3^2} = \sqrt{11}$ d) si $\vec{u}\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{0^2+(-4)^2} = 4$

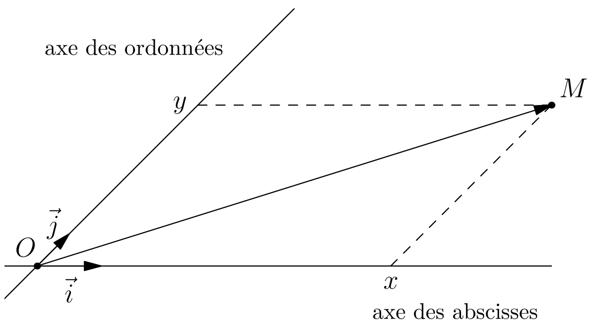
xm1math.net

2. Coordonnées d'un point dans un repère

a) Définition et propriétés

Définition

On appelle **coordonnées** d'un point M dans un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ l'unique couple de réels (x,y) tels que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$. x est appelé **abscisse** de M et y est appelé **ordonnée** de M.
Notation : $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ou $M(x,y)$. Autrement dit, $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$



Propriété(s)

Dans un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$: *si* $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ *et* $B\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ *alors* $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$
« coordonnées du 2e point - coordonnées du 1er point »

Démonstration : car $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

xm1math.net

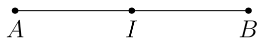
2. Coordonnées d'un point dans un repère

Propriété(s)

Dans un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ *: si* $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ *et* $B\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ *alors le milieu de* $[AB]$ *est* $I\begin{pmatrix} \dfrac{x_A+x_B}{2} \\ \dfrac{y_A+y_B}{2} \end{pmatrix}$

Preuve : I milieu de $[AB] \Leftrightarrow \overrightarrow{AI}\begin{pmatrix} x_I - x_A \\ y_I - y_A \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} \frac{x_B - x_A}{2} \\ \frac{y_B - y_A}{2} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I - x_A = \frac{x_B - x_A}{2} \\ y_I - y_A = \frac{y_B - y_A}{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \frac{x_B - x_A}{2} + \frac{2x_A}{2} = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = \frac{y_B - y_A}{2} + \frac{2y_A}{2} = \frac{y_B + y_A}{2} \end{cases}$



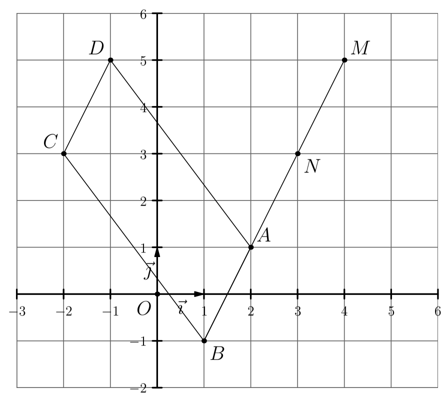
Propriété(s)

Dans un repère ***orthonormé*** $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ *: si* $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ *et* $B\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ *alors la distance* AB *est telle que* $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

Preuve : car la distance AB est aussi la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

2. Coordonnées d'un point dans un repère

Exemple(s)



Dans le repère orthonormé ci-contre, on considère les points $A\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

a) Placer les points A, B et C.

b) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$.
$\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow 2 - 1 \\ \leftarrow 1 - (-1) \end{matrix}$; $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow -2 - 1 \\ \leftarrow 3 - (-1) \end{matrix}$

c) Déterminer les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{BM} = 3\overrightarrow{BA}$
$\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} x_M - 1 \\ y_M + 1 \end{pmatrix} = 3\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix} 3 \times 1 \\ 3 \times 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M - 1 = 3 \\ y_M + 1 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = 4 \\ y_M = 5 \end{cases}$

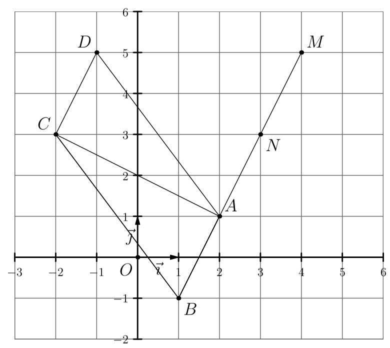
d) Déterminer les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.
$ABCD$ parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} x_D - 2 \\ y_D - 1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D - 2 = -3 \\ y_D - 1 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = -1 \\ y_D = 5 \end{cases}$

e) Déterminer les coordonnées du point N tel que A soit le milieu de $[BN]$.
$\begin{cases} x_A = \frac{x_B + x_N}{2} \\ y_A = \frac{y_B + y_N}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = \frac{1 + x_N}{2} \\ 1 = \frac{-1 + y_N}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x_N = 4 - 1 = 3 \\ y_N = 2 + 1 = 3 \end{cases}$

2. Coordonnées d'un point dans un repère

Exemple(s)

Rappel : $A\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $C\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$



f) Calculer les distances AB, AC et BC

$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(1-2)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$

$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(-2-2)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (2)^2} = \sqrt{20}$

$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(-2-1)^2 + (3-(-1))^2} = \sqrt{(-3)^2 + (4)^2} = \sqrt{25} = 5$

g) Justifier que le triangle ABC est rectangle.
On a $AB^2 + AC^2 = 5 + 20 = 25 = BC^2$. Donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, on peut en déduire que le triangle ABC est rectangle en A.

2. Coordonnées d'un point dans un repère

b) Application aux problèmes d'alignement et de parallélisme

Propriété(s)

Dire que trois points A, B et C sont alignés équivaut à dire que $det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$.

Preuve : puisque cela revient à dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Exemple(s)

Dans un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ les points $A\begin{pmatrix} -1/2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 1/2 \\ 5/2 \end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix} 7/2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont-ils alignés ?

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow 1/2 - (-1/2) \\ \leftarrow 5/2 - 3 \end{matrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow 7/2 - (-1/2) \\ \leftarrow 1 - 3 \end{matrix}$

On en déduit que $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1/2 & -2 \end{vmatrix} = 1 \times (-2) - (-\frac{1}{2}) \times 4 = 0$.

Les points A, B et C sont alignés.

Propriété(s)

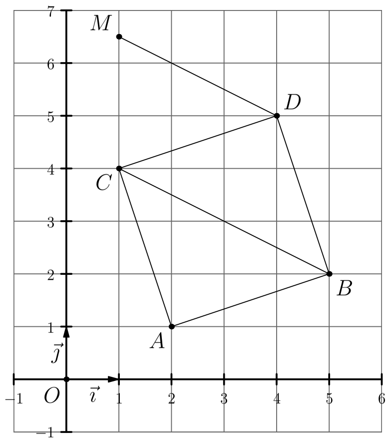
Dire que les droites (AB) et (CD) sont parallèles équivaut à dire que $det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 0$.

Preuve : puisque cela revient à dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

2. Coordonnées d'un point dans un repère

Exemple(s)

Dans le repère orthonormé ci-contre, on considère les points
$A\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$



a) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow 5-2 \\ \leftarrow 2-1 \end{matrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow 1-2 \\ \leftarrow 4-1 \end{matrix}$

b) Déterminer les coordonnées du point D tel que $ABDC$ soit un parallélogramme.
$ABDC$ parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} x_D-1 \\ y_D-4 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$
$\begin{cases} x_D-1=3 \\ y_D-4=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D=4 \\ y_D=5 \end{cases}$

c) Déterminer les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$
$\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix} x_M-1 \\ y_M-4 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3/4 \\ 1/4 \end{pmatrix} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -3/4 \\ 9/4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$
$\begin{cases} x_M-1=0 \\ y_M-4=5/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M=1 \\ y_M=13/2 \end{cases}$

d) Vérifier que les droites (DM) et (BC) sont parallèles.
On a $\overrightarrow{DM}\begin{pmatrix} -3 \\ 3/2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow 1-4 \\ \leftarrow 13/2-5 \end{matrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow 1-5 \\ \leftarrow 4-2 \end{matrix}$
Donc, $\det(\overrightarrow{DM}, \overrightarrow{BC}) = \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 3/2 & 2 \end{vmatrix} = -3\times 2 - \frac{3}{2}\times(-4) = 0.$

3. Équations cartésiennes d'une droite

a) Définition

Propriété(s)

Dans un repère du plan, les cordonnées x et y des points d'une droite d vérifient une relation de la forme $ax+by+c=0$ (a et b ne pouvant pas être nuls en même temps).
On dit que $ax+by+c=0$ est ***une équation cartésienne*** *de la droite d.*

Démonstration

Soit $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ un point et $\vec{u}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ un vecteur directeur de la droite d.
$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in d \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-x_A & \alpha \\ y-y_A & \beta \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \beta(x-x_A) - \alpha(y-y_A) = 0 \Leftrightarrow$
$\beta x - \alpha y + \alpha y_A - \beta x_A = 0$. Ce qui est bien de la forme $ax+by+c=0$ (il suffit de prendre $a=\beta$; $b=-\alpha$; $c = \alpha y_A - \beta x_A$)

Propriété(s)

Réciproquement, l'ensemble des points dont les coordonnées x et y vérifient l'équation $ax+by+c=0$ (a et b non nuls en même temps) est une droite dont un vecteur directeur est $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

3. Équations cartésiennes d'une droite

Démonstration

Soit A un point dont les coordonnées x_A et y_A vérifient l'équation $ax + by + c = 0$, c'est à dire telles que $ax_A + by_A + c = 0$.
Dire qu'un point M a ses coordonnées x et y vérifiant la relation $ax + by + c = 0$ équivaut à dire que $ax + by + c - (ax_A + by_A + c) = 0 \Leftrightarrow a\,(x - x_A) + b\,(y - y_A) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - x_A & -b \\ y - y_A & a \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ colinéaires. Donc tous les points dont les coordonnées x et y vérifient l'équation $ax + by + c = 0$ sont sur une même droite dont un vecteur directeur est $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

Remarque(s)

Une droite admet une infinité d'équations cartésiennes équivalentes.
En effet, pour tout réel $k \neq 0$, $ax + by + c = 0 \Leftrightarrow k\,(ax + by + c) = 0$

b) Comment tracer une droite dont on connait une équation cartésienne

Méthode pour les droites non parallèles aux axes

On détermine les coordonnées de 2 points distincts de la droite en prenant un x et/ou un y particulier.

3. Équations cartésiennes d'une droite

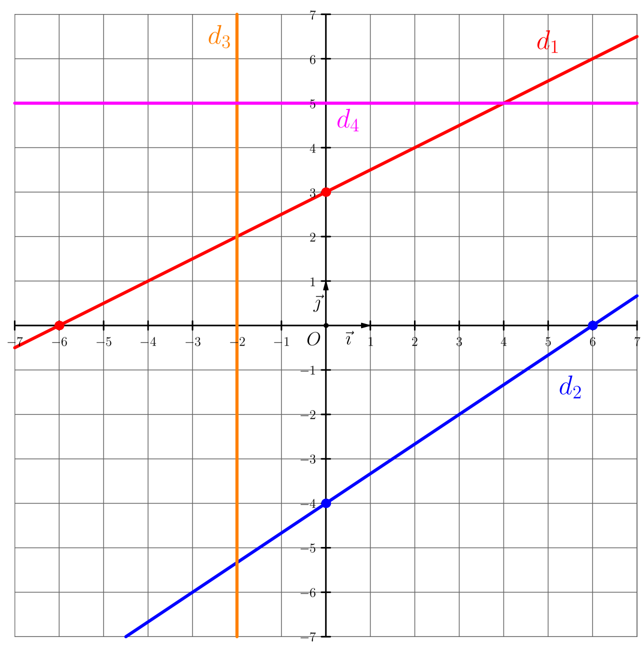
Exemple(s)

a) Tracer la droite d_1 d'équation $x - 2y + 6 = 0$.
Si $x = 0$, $x - 2y + 6 = 0 \Leftrightarrow -2y + 6 = 0 \Leftrightarrow y = 3$
La droite passe par le point d'abscisse 0 et d'ordonnée 3.
Si $y = 0$, $x - 2y + 6 = 0 \Leftrightarrow x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -6$
La droite passe par le point d'abscisse -6 et d'ordonnée 0.

b) Tracer la droite d_2 d'équation $-2x + 3y + 12 = 0$.
Si $x = 0$,
$-2x + 3y + 12 = 0 \Leftrightarrow 3y + 12 = 0 \Leftrightarrow y = -4$
La droite passe par le point d'abscisse 0 et d'ordonnée -4.
Si $y = 0$,
$-2x + 3y + 12 = 0 \Leftrightarrow -2x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = 6$
La droite passe par le point d'abscisse 6 et d'ordonnée 0.

c) Tracer la droite d_3 d'équation $x + 2 = 0$.
C'est un cas particulier : $x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$
Tous les points de la droite ont la même abscisse : c'est une droite parallèle à l'axe des ordonnées

d) Tracer la droite d_4 d'équation $y - 5 = 0$.
C'est un cas particulier : $y - 5 = 0 \Leftrightarrow y = 5$
Tous les points de la droite ont la même ordonnée : c'est une droite parallèle à l'axe des abscisses



3. Équations cartésiennes d'une droite

c) Cas particulier des droites parallèles aux axes

Propriété(s)

Dans un repère orthogonal :

- *Les droites verticales admettent une équation de la forme « $x =$ une constante » ;*
- *Les droites horizontales admettent une équation de la forme « $y =$ une constante ».*

d) Comment déterminer si un point est sur une droite dont on connait une équation ?

Méthode

On regarde si ses coordonnées vérifient l'équation de la droite.

Exemple(s)

Le point $A\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ est-il sur la droite d d'équation $4x - 5y - 5 = 0$? $4 \times 5 - 5 \times 3 - 5 = 0$ donc $A \in d$.

3. Équations cartésiennes d'une droite

e) Comment déterminer un vecteur directeur d'une droite d'équation $ax + by + c = 0$?

Méthode

Un vecteur directeur est $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

Exemple(s)

a) Un vecteur directeur de la droite d'équation $3x + 4y + 5 = 0$ est $\vec{u}\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

b) Un vecteur directeur de la droite d'équation $-x - 2y + 4 = 0$ est $\vec{u}\begin{pmatrix} -(-2) \\ -1 \end{pmatrix} = \vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

c) Un vecteur directeur de la droite d'équation $x + 2 = 0$ est $\vec{u}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

d) Un vecteur directeur de la droite d'équation $y - 3 = 0$ est $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

3. Équations cartésiennes d'une droite

f) Comment déterminer une équation cartésienne d'une droite connaissant un de ses points A et un vecteur directeur $\vec{u}$?

Méthode

On exprime que dire qu'un point $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est sur la droite équivaut à dire que $\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0$.

Exemple(s)

Détermination d'une équation cartésienne de la droite d passant par $A\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$:

$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in d \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+2 & 4 \\ y-3 & 5 \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow 5(x+2) - 4(y-3) = 0 \Leftrightarrow 5x - 4y + 22 = 0$.

Une équation de d est $5x - 4y + 22 = 0$

xm1math.net

3. Équations cartésiennes d'une droite

g) Comment déterminer une équation cartésienne d'une droite connaissant deux de ses points A et B $(A \neq B)$?

Méthode

On exprime que dire qu'un point $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est sur la droite équivaut à dire que $\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0$.

Exemple(s)

a) Détermination d'une équation cartésienne de la droite d passant par $A\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$:

$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in d \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-2 & -5 \\ y-7 & -3 \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow -3(x-2) - (-5)(y-7) = 0 \Leftrightarrow -3x + 5y - 29 = 0$. Une équation de d est $3x + 5y - 29 = 0$

b) Détermination d'une équation cartésienne de la droite d passant par $C\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $D\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in d \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CD}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+1 & 8 \\ y & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow x + 1 - 8y = 0 \Leftrightarrow x - 8y + 1 = 0$. Une équation de d est $x - 8y + 1 = 0$

xm1math.net

3. Équations cartésiennes d'une droite

h) Comment déterminer si la droite d d'équation $ax+by+c=0$ est parallèle à la droite d' d'équation $a'x+b'y+c'=0$?

Méthode

On détermine si les vecteurs directeurs $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ et $\vec{u}'\begin{pmatrix} -b' \\ a' \end{pmatrix}$ des deux droites sont colinéaires en vérifiant si leur déterminant est nul.

Exemple(s)

La droite d d'équation $3x-12y+7=0$ est-elle parallèle à la droite d' d'équation $-2x+8y-1=0$?
Un vecteur directeur de d est $\vec{u}\begin{pmatrix} 12 \\ 3 \end{pmatrix}$ et un vecteur directeur de d' est $\vec{u}'\begin{pmatrix} -8 \\ -2 \end{pmatrix}$.
$\det(\vec{u},\vec{u}') = \begin{vmatrix} 12 & -8 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 12\times(-2)-3\times(-8)=0.$
$\vec{u}$ et $\vec{u}'$ étant colinéaires, on peut en conclure que les droites d et d' sont parallèles.

xm1math.net

3. Équations cartésiennes d'une droite

i) Comment déterminer une équation de la droite d' parallèle à la droite d d'équation $ax+by+c=0$ et passant par un point A ?

Méthode

On détermine un vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ de d (qui est donc aussi un vecteur directeur de d') et on exprime que dire qu'un point $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est sur d' équivaut à dire que $\det(\overrightarrow{AM},\vec{u})=0$.

Exemple(s)

Détermination d'une équation de la droite d' parallèle à la droite d d'équation $3x-4y+1=0$ et passant par le point $A\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$:
Un vecteur directeur de d (et donc aussi de d') est $\vec{u}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.
$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in d' \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM},\vec{u})=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+5 & 4 \\ y-1 & 3 \end{vmatrix}=0$
$\Leftrightarrow 3(x+5)-4(y-1)=0 \Leftrightarrow 3x-4y+19=0$. Une équation de d' est $3x-4y+19=0$

xm1math.net

4. Équation réduite d'une droite non parallèle à l'axe des ordonnées

a) Définition

Propriété(s)

Dans un repère du plan, toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées admet une équation, dite ***équation réduite****, de la forme $y = mx + p$. Cette forme est unique et m est appelé* ***coefficient directeur*** *de la droite (p est lui appelé ordonnée à l'origine).*

Démonstration

Si une droite d d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées alors nécessairement $b \neq 0$. Et donc, $ax + by + c = 0 \Leftrightarrow by = -ax - c \Leftrightarrow y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$. On a bien $y = mx + p$ en prenant $m = -\frac{a}{b}$ et $p = -\frac{c}{b}$.

b) Propriétés

Propriété(s)

Si $y = mx + p$ est l'équation réduite d'une droite alors un de ses vecteurs directeurs est $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$.

Démonstration

Démonstration : $y = mx + p \Leftrightarrow mx - y + p = 0 \Leftrightarrow ax + by + c = 0$ avec $a = m$,$b = -1$ et $c = p$. Un vecteur directeur est $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = \vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$

4. Équation réduite d'une droite non parallèle à l'axe des ordonnées

Propriété(s)

Si deux points distincts $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ sont sur la droite d'équation réduite $y = mx + p$ alors on a $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

On dit que le coefficient directeur d'une droite est égal à $\dfrac{\text{différence des ordonnées}}{\text{différence des abscisses}}$.

Démonstration

$y_B - y_A = mx_B + p - (mx_A + p) = mx_B + p - mx_A - p = m(x_B - x_A)$

Propriété(s)

Dire que deux droites non parallèles à l'axe des ordonnées sont ***parallèles*** *équivaut à dire qu'elles ont le* ***même coefficient directeur****.*

Démonstration

Dire que la droite d d'équation réduite $y = mx + p$ est parallèle à la droite d' d'équation réduite $y = m'x + p'$ équivaut à dire que les vecteurs directeurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ et $\vec{u}'\begin{pmatrix} 1 \\ m' \end{pmatrix}$ sont colinéaires. Or, $\det(\vec{u}, \vec{u}') = 0 \Leftrightarrow m = m'$

4. Équation réduite d'une droite non parallèle à l'axe des ordonnées

c) Comment tracer une droite connaissant son équation réduite ?

Méthode

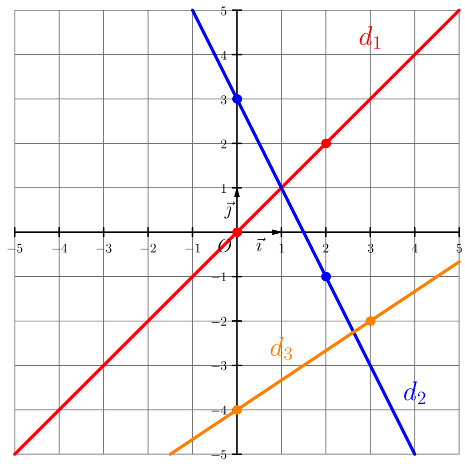
On détermine les coordonnées de deux points distincts en prenant deux x différents.

Exemple(s)

a) Tracer la droite d_1 d'équation $y = x$.
Si $x = 0$, $y = 0$. La droite passe par le point d'abscisse 0 et d'ordonnée 0.
Si $x = 2$, $y = 2$. La droite passe par le point d'abscisse 2 et d'ordonnée 2.

b) Tracer la droite d_2 d'équation $y = -2x + 3$.
Si $x = 0$, $y = 3$. La droite passe par le point d'abscisse 0 et d'ordonnée 3.
Si $x = 2$, $y = -2 \times 2 + 3 = -1$. La droite passe par le point d'abscisse 2 et d'ordonnée -1.

c) Tracer la droite d_3 d'équation $y = \frac{2}{3}x - 4$.
Si $x = 0$, $y = -4$. La droite passe par le point d'abscisse 0 et d'ordonnée -4.
Si $x = 3$, $y = \frac{2}{3} \times 3 - 4 = -2$. La droite passe par le point d'abscisse 3 et d'ordonnée -2.



4. Équation réduite d'une droite non parallèle à l'axe des ordonnées

d) Comment déterminer l'équation réduite d'une droite connaissant deux de ses points A et B ?

Méthode

- On calcule $m = \dfrac{\text{différence des ordonnées}}{\text{différence des abscisses}} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$;
- On détermine p en exprimant que l'on doit avoir $y_A = mx_A + p$ (ou $y_B = mx_B + p$)

Exemple(s)

- Détermination de l'équation réduite de la droite passant par $A\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$:
  $m = \dfrac{5-3}{2-1} = 2$
  $y_A = mx_A + p \Leftrightarrow 3 = 2 \times 1 + p \Leftrightarrow p = 1$.
  L'équation réduite de (AB) est $y = 2x + 1$.
- Détermination de l'équation réduite de la droite passant par $A\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\0\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}$:
  $m = \dfrac{-4-0}{1-\frac{3}{2}} = \dfrac{-4}{-\frac{1}{2}} = 8$
  $y_A = mx_A + p \Leftrightarrow 0 = 8 \times \frac{3}{2} + p \Leftrightarrow p = -12$.
  L'équation réduite de (AB) est $y = 8x - 12$.

Fin du chapitre

xm1math.net