

# Géométrie analytique - 2nde

©Pascal Brachet (CC BY NC SA)

<https://www.xm1math.net>

# 1. Coordonnées d'un vecteur dans une base

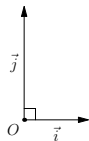
## a) Bases et repères

### Définition

- On appelle **base** du plan tout couple  $(\vec{i}, \vec{j})$  de vecteurs non colinéaires du plan.
- On appelle **repère** du plan tout triplet  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  où  $O$  est un point du plan, appelé origine du repère, et  $(\vec{i}, \vec{j})$  est une base.

### Remarque(s)

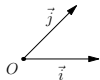
- $(O, \vec{i}, \vec{j})$  et  $(O, \vec{j}, \vec{i})$  ne représentent pas le même repère.
- Si  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  sont orthogonaux, le repère est dit orthogonal.



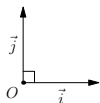
# 1. Coordonnées d'un vecteur dans une base

## Remarque(s)

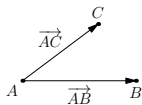
- Si  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  sont de même longueur, le repère est dit normé.



- Si  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  sont orthogonaux et de même longueur, le repère est dit orthonormé (ou orthonormal).



- Si  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont trois points non alignés alors  $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$  forme un repère du plan.



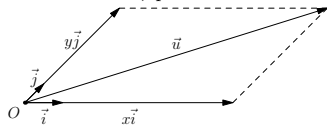
# 1. Coordonnées d'un vecteur dans une base

## b) Décomposition d'un vecteur dans une base

Théorème (admis)

Dans une base  $(\vec{i}, \vec{j})$  tout vecteur  $\vec{u}$  se décompose de façon unique comme la somme d'un vecteur colinéaire à  $\vec{i}$  et d'un vecteur colinéaire à  $\vec{j}$ .

Autrement dit, pour tout vecteur  $\vec{u}$ , il existe deux réels uniques  $x$  et  $y$  tels que  $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ .



## c) Coordonnées d'un vecteur dans une base

Définition

On appelle **coordonnées** d'un vecteur  $\vec{u}$  dans une base  $(\vec{i}, \vec{j})$  l'unique couple de réels  $(x, y)$  tels que  $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ .  $x$  est appelé **abscisse** de  $\vec{u}$  et  $y$  est appelé **ordonnée** de  $\vec{u}$ .

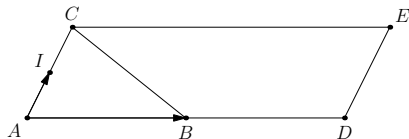
Notation :  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  ou  $\vec{u}(x, y)$ .

Autrement dit,  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$

# 1. Coordonnées d'un vecteur dans une base

## Exemple(s)

Dans la figure ci-dessous,  $ADEC$  est un parallélogramme,  $B$  est le milieu de  $[AD]$  et  $I$  est le milieu de  $[AC]$ .



$\vec{AB}$  et  $\vec{AI}$  étant non colinéaires,  $(A, \vec{AB}, \vec{AI})$  forme un repère du plan et on a :

- $\vec{AE} = 2\vec{AB} + 2\vec{AI}$ . Ce qui équivaut à dire que  $\vec{AE} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$
- $\vec{BC} = -\vec{AB} + 2\vec{AI}$ . Ce qui équivaut à dire que  $\vec{BC} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$
- $\vec{DI} = -2\vec{AB} + \vec{AI}$ . Ce qui équivaut à dire que  $\vec{DI} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

# 1. Coordonnées d'un vecteur dans une base

## Propriété(s)

Dans une base  $(\vec{i}, \vec{j})$  :

- Dire que deux vecteurs sont égaux équivaut à dire qu'ils ont la même abscisse et la même ordonnée.
- Si  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  alors on a  $\vec{u} + \vec{v} \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$  et  $\vec{u} - \vec{v} \begin{pmatrix} x - x' \\ y - y' \end{pmatrix}$ .
- Si  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  alors, pour tout réel  $k$ , on a  $k\vec{u} \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$ .

## Exemple(s)

Dans une base  $(\vec{i}, \vec{j})$ , si  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$  alors :

$$\vec{u} + \vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow 1 + (-3) \\ \leftarrow 2 + 0 \end{array} ; -4\vec{u} \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow -4 \times 1 \\ \leftarrow -4 \times 2 \end{array} ;$$

$$3\vec{u} - 2\vec{v} \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow 3 \times 1 - 2 \times (-3) \\ \leftarrow 3 \times 2 - 2 \times 0 \end{array}$$

# 1. Coordonnées d'un vecteur dans une base

## d) Déterminant de deux vecteurs dans une base

### Définition

Dans une base  $(\vec{i}, \vec{j})$ , on appelle **déterminant** des vecteurs  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  le réel noté  $\det(\vec{u}, \vec{v})$  défini par :  $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = x \times y' - y \times x'$

### Exemple(s)

- Si  $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$  alors  $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \times 4 - 1 \times 3 = 5$
- Si  $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$  alors  $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = -1 \times (-6) - 2 \times 3 = 0$
- Si  $\vec{u} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$  alors  $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} \sqrt{2} & 3 \\ 1 & \sqrt{2} \end{vmatrix} = \sqrt{2} \times \sqrt{2} - 1 \times 3 = -1$

# 1. Coordonnées d'un vecteur dans une base

## e) Condition de colinéarité de deux vecteurs dans une base

### Propriété(s)

Dans une base  $(\vec{i}, \vec{j})$ , dire que deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires équivaut à dire que  $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ .

Démonstration, par double implication, dans le cas de deux vecteurs non nuls :

- Si  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  sont colinéaires, c'est que par définition, il existe un réel  $k$  tel que  $\vec{u} = k\vec{v} \Rightarrow x = kx'$  et  $y = ky' \Rightarrow \det(\vec{u}, \vec{v}) = x \times y' - y \times x' = kx' \times y' - ky' \times x' = 0$ .
- Si  $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$  alors on a  $x \times y' - y \times x' = 0 \Rightarrow x \times y' = y \times x'$ . En supposant que  $x \neq 0$ , on en déduit que  $y' = \frac{x'}{x} \times y$ . Or, comme on a aussi  $x' = \frac{x'}{x} \times x$ , on peut en conclure que  $\vec{v} = \frac{x'}{x} \vec{u}$  et que  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires.

### Exemple(s)

On a calculé, à l'exemple précédent, qu'avec  $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$  on avait  $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ .  
On peut donc en conclure que ces deux vecteurs sont colinéaires.



# 1. Coordonnées d'un vecteur dans une base

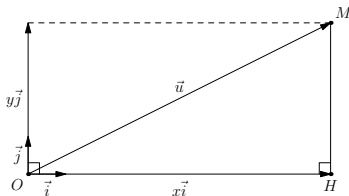
## f) Norme d'un vecteur dans une base orthonormée

### Propriété(s)

Dans une base **orthonormée**  $(\vec{i}, \vec{j})$ , si  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  alors sa norme est  $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

**Piste de « démonstration »** : soit  $O$  un point du plan,  $M$  le point tel que  $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$  et  $H$  le projeté orthogonal de  $M$  sur les abscisses.

Selon que  $x$  soit positif ou négatif, la distance  $OH$  est égale à  $x$  ou  $-x$  et, selon que  $y$  soit positif ou négatif, la distance  $HM$  est égale à  $y$  ou  $-y$ . Dans tous les cas,  $OH^2 = x^2$  et  $HM^2 = y^2$ . On en déduit que  $OM^2 = x^2 + y^2$ .



### Exemple(s)

- a) si  $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$  alors  $\|\vec{u}\| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$     b) si  $\vec{u} \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}$  alors  $\|\vec{u}\| = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5$   
 c) si  $\vec{u} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 3 \end{pmatrix}$  alors  $\|\vec{u}\| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 3^2} = \sqrt{11}$     d) si  $\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$  alors  $\|\vec{u}\| = \sqrt{0^2 + (-4)^2} = 4$

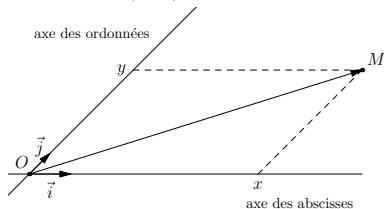
## 2. Coordonnées d'un point dans un repère

### a) Définition et propriétés

#### Définition

On appelle **coordonnées** d'un point  $M$  dans un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  l'unique couple de réels  $(x, y)$  tels que  $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ .  $x$  est appelé **abscisse** de  $M$  et  $y$  est appelé **ordonnée** de  $M$ .

Notation :  $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  ou  $M(x, y)$ . Autrement dit,  $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$



#### Propriété(s)

Dans un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  : si  $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$  et  $B \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$  alors  $\vec{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$   
 « coordonnées du 2<sup>e</sup> point - coordonnées du 1<sup>er</sup> point »

Démonstration : car  $\vec{AB} = \vec{AO} + \vec{OB} = \vec{OB} - \vec{OA}$

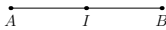
## 2. Coordonnées d'un point dans un repère

### Propriété(s)

Dans un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  : si  $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$  et  $B \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$  alors le milieu de  $[AB]$  est  $I \begin{pmatrix} \frac{x_A + x_B}{2} \\ \frac{y_A + y_B}{2} \end{pmatrix}$

Preuve :  $I$  milieu de  $[AB] \Leftrightarrow \vec{AI} \begin{pmatrix} x_I - x_A \\ y_I - y_A \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \vec{AB} \begin{pmatrix} \frac{x_B - x_A}{2} \\ \frac{y_B - y_A}{2} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I - x_A = \frac{x_B - x_A}{2} \\ y_I - y_A = \frac{y_B - y_A}{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \frac{x_B - x_A}{2} + \frac{2x_A}{2} = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = \frac{y_B - y_A}{2} + \frac{2y_A}{2} = \frac{y_B + y_A}{2} \end{cases}$



### Propriété(s)

Dans un repère **orthonormé**  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  : si  $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$  et  $B \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$  alors la distance  $AB$  est telle que  $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

Preuve : car la distance  $AB$  est aussi la norme du vecteur  $\vec{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

## 2. Coordonnées d'un point dans un repère

### Exemple(s)

Dans le repère orthonormé ci-contre, on considère les points

$$A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, B \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } C \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

a) Placer les points  $A$ ,  $B$  et  $C$ .

b) Déterminer les coordonnées des vecteurs  $\overrightarrow{BA}$  et  $\overrightarrow{BC}$ .

$$\overrightarrow{BA} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow 2 - 1 \\ \leftarrow 1 - (-1) \end{matrix}; \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow -2 - 1 \\ \leftarrow 3 - (-1) \end{matrix}$$

c) Déterminer les coordonnées du point  $M$  tel que  $\overrightarrow{BM} = 3\overrightarrow{BA}$

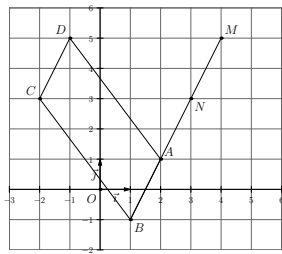
$$\overrightarrow{BM} \begin{pmatrix} x_M - 1 \\ y_M + 1 \end{pmatrix} = 3\overrightarrow{BA} \begin{pmatrix} 3 \times 1 \\ 3 \times 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M - 1 = 3 \\ y_M + 1 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = 4 \\ y_M = 5 \end{cases}$$

d) Déterminer les coordonnées du point  $D$  tel que  $ABCD$  soit un parallélogramme.

$$ABCD \text{ parallélogramme} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} x_D - 2 \\ y_D - 1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D - 2 = -3 \\ y_D - 1 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = -1 \\ y_D = 5 \end{cases}$$

e) Déterminer les coordonnées du point  $N$  tel que  $A$  soit le milieu de  $[BN]$ .

$$\begin{cases} x_A = \frac{x_B + x_N}{2} \\ y_A = \frac{y_B + y_N}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = \frac{1 + x_N}{2} \\ 1 = \frac{-1 + y_N}{2} \end{cases} \begin{cases} x_N = 4 - 1 = 3 \\ y_N = 2 + 1 = 3 \end{cases}$$



## 2. Coordonnées d'un point dans un repère

### Exemple(s)

Rappel :  $A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ;  $B \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ;  $C \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

f) Calculer les distances  $AB$ ,  $AC$  et  $BC$

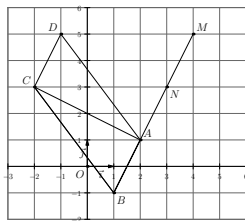
$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(1 - 2)^2 + (-1 - 1)^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$$

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(-2 - 2)^2 + (3 - 1)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (2)^2} = \sqrt{20}$$

$$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(-2 - 1)^2 + (3 - (-1))^2} = \sqrt{(-3)^2 + (4)^2} = \sqrt{25} = 5$$

g) Justifier que le triangle  $ABC$  est rectangle.

On a  $AB^2 + AC^2 = 5 + 20 = 25 = BC^2$ . Donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, on peut en déduire que le triangle  $ABC$  est rectangle en  $A$ .



## 2. Coordonnées d'un point dans un repère

### b) Application aux problèmes d'alignement et de parallélisme

#### Propriété(s)

Dire que trois points  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont alignés équivaut à dire que  $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$ .

Preuve : puisque cela revient à dire que les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  sont colinéaires.

#### Exemple(s)

Dans un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  les points  $A \begin{pmatrix} -1/2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $B \begin{pmatrix} 1/2 \\ 5/2 \end{pmatrix}$  et  $C \begin{pmatrix} 7/2 \\ 1 \end{pmatrix}$  sont-ils alignés ?

On a  $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow 1/2 - (-1/2) \\ \leftarrow 5/2 - 3 \end{matrix}$  et  $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow 7/2 - (-1/2) \\ \leftarrow 1 - 3 \end{matrix}$

On en déduit que  $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1/2 & -2 \end{vmatrix} = 1 \times (-2) - (-\frac{1}{2}) \times 4 = 0$ .

Les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont alignés.

#### Propriété(s)

Dire que les droites  $(AB)$  et  $(CD)$  sont parallèles équivaut à dire que  $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 0$ .

Preuve : puisque cela revient à dire que les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{CD}$  sont colinéaires.

## 2. Coordonnées d'un point dans un repère

### Exemple(s)

Dans le repère orthonormé ci-contre, on considère les points

$$A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, B \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } C \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

- a) Déterminer les coordonnées des vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$ .

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow 5-2 \\ \leftarrow 2-1 \end{matrix}; \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow 1-2 \\ \leftarrow 4-1 \end{matrix}$$

- b) Déterminer les coordonnées du point  $D$  tel que  $ABDC$  soit un parallélogramme.

$$ABDC \text{ parallélogramme} \Leftrightarrow \overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} x_D - 1 \\ y_D - 4 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_D - 1 = 3 \\ y_D - 4 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 4 \\ y_D = 5 \end{cases}$$

- c) Déterminer les coordonnées du point  $M$  tel que

$$\overrightarrow{CM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$$

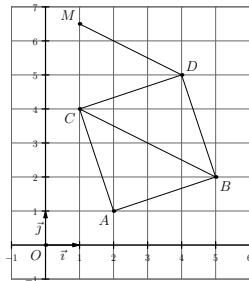
$$\overrightarrow{CM} \begin{pmatrix} x_M - 1 \\ y_M - 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3/4 \\ 1/4 \end{pmatrix} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -3/4 \\ 9/4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_M - 1 = 0 \\ y_M - 4 = 5/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = 1 \\ y_M = 13/2 \end{cases}$$

- d) Vérifier que les droites  $(DM)$  et  $(BC)$  sont parallèles.

$$\text{On a } \overrightarrow{DM} \begin{pmatrix} -3 \\ 3/2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow 1-4 \\ \leftarrow 13/2-5 \end{matrix} \text{ et } \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow 1-5 \\ \leftarrow 4-2 \end{matrix}$$

$$\text{Donc, } \det(\overrightarrow{DM}, \overrightarrow{BC}) = \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 3/2 & 2 \end{vmatrix} = -3 \times 2 - \frac{3}{2} \times (-4) = 0.$$



### 3. Équations cartésiennes d'une droite

#### a) Définition

##### Propriété(s)

Dans un repère du plan, les coordonnées  $x$  et  $y$  des points d'une droite  $d$  vérifient une relation de la forme  $ax + by + c = 0$  ( $a$  et  $b$  ne pouvant pas être nuls en même temps).

On dit que  $ax + by + c = 0$  est **une équation cartésienne** de la droite  $d$ .

##### Démonstration

Soit  $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$  un point et  $\vec{u} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$  un vecteur directeur de la droite  $d$ .

$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in d \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - x_A & \alpha \\ y - y_A & \beta \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \beta(x - x_A) - \alpha(y - y_A) = 0 \Leftrightarrow \beta x - \alpha y + \alpha y_A - \beta x_A = 0$ . Ce qui est bien de la forme  $ax + by + c = 0$  (il suffit de prendre  $a = \beta$ ;  $b = -\alpha$ ;  $c = \alpha y_A - \beta x_A$ )

##### Propriété(s)

Réciproquement, l'ensemble des points dont les coordonnées  $x$  et  $y$  vérifient l'équation  $ax + by + c = 0$  ( $a$  et  $b$  non nuls en même temps) est une droite dont un vecteur directeur est

$$\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}.$$



### 3. Équations cartésiennes d'une droite

#### Démonstration

Soit  $A$  un point dont les coordonnées  $x_A$  et  $y_A$  vérifient l'équation  $ax + by + c = 0$ , c'est à dire telles que  $ax_A + by_A + c = 0$ .

Dire qu'un point  $M$  a ses coordonnées  $x$  et  $y$  vérifiant la relation  $ax + by + c = 0$  équivaut à dire que

$$ax + by + c - (ax_A + by_A + c) = 0 \Leftrightarrow a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - x_A & -b \\ y - y_A & a \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$$

et  $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$  colinéaires. Donc tous les points dont les coordonnées  $x$  et  $y$  vérifient l'équation

$$ax + by + c = 0 \text{ sont sur une même droite dont un vecteur directeur est } \vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}.$$

#### Remarque(s)

Une droite admet une infinité d'équations cartésiennes équivalentes.

En effet, pour tout réel  $k \neq 0$ ,  $ax + by + c = 0 \Leftrightarrow k(ax + by + c) = 0$

#### b) Comment tracer une droite dont on connaît une équation cartésienne

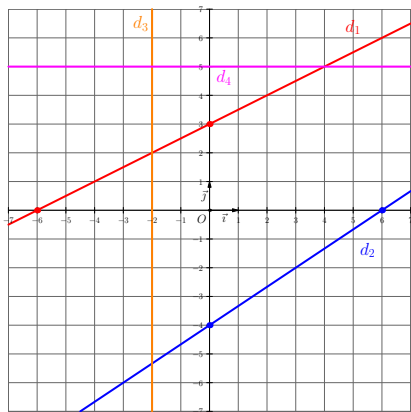
##### Méthode pour les droites non parallèles aux axes

On détermine les coordonnées de 2 points distincts de la droite en prenant un  $x$  et/ou un  $y$  particulier.

### 3. Équations cartésiennes d'une droite

#### Exemple(s)

- a) Tracer la droite  $d_1$  d'équation  $x - 2y + 6 = 0$ .  
 Si  $x = 0$ ,  $x - 2y + 6 = 0 \Leftrightarrow -2y + 6 = 0 \Leftrightarrow y = 3$   
 La droite passe par le point d'abscisse 0 et d'ordonnée 3.  
 Si  $y = 0$ ,  $x - 2y + 6 = 0 \Leftrightarrow x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -6$   
 La droite passe par le point d'abscisse  $-6$  et d'ordonnée 0.
- b) Tracer la droite  $d_2$  d'équation  $-2x + 3y + 12 = 0$ .  
 Si  $x = 0$ ,  
 $-2x + 3y + 12 = 0 \Leftrightarrow 3y + 12 = 0 \Leftrightarrow y = -4$   
 La droite passe par le point d'abscisse 0 et d'ordonnée  $-4$ .  
 Si  $y = 0$ ,  
 $-2x + 3y + 12 = 0 \Leftrightarrow -2x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = 6$   
 La droite passe par le point d'abscisse 6 et d'ordonnée 0.
- c) Tracer la droite  $d_3$  d'équation  $x + 2 = 0$ .  
 C'est un cas particulier :  $x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$   
 Tous les points de la droite ont la même abscisse :  
 c'est une droite parallèle à l'axe des ordonnées
- d) Tracer la droite  $d_4$  d'équation  $y - 5 = 0$ .  
 C'est un cas particulier :  $y - 5 = 0 \Leftrightarrow y = 5$   
 Tous les points de la droite ont la même ordonnée :  
 c'est une droite parallèle à l'axe des abscisses



### 3. Équations cartésiennes d'une droite

#### c) Cas particulier des droites parallèles aux axes

##### Propriété(s)

Dans un repère orthogonal :

- Les droites verticales admettent une équation de la forme «  $x = \text{une constante}$  » ;
- Les droites horizontales admettent une équation de la forme «  $y = \text{une constante}$  ».

#### d) Comment déterminer si un point est sur une droite dont on connaît une équation ?

##### Méthode

On regarde si ses coordonnées vérifient l'équation de la droite.

##### Exemple(s)

Le point  $A \left( \begin{array}{c} 5 \\ 3 \end{array} \right)$  est-il sur la droite  $d$  d'équation  $4x - 5y - 5 = 0$  ?  $4 \times 5 - 5 \times 3 - 5 = 0$  donc  $A \in d$ .

### 3. Équations cartésiennes d'une droite

e) Comment déterminer un vecteur directeur d'une droite d'équation  $ax + by + c = 0$  ?

Méthode

Un vecteur directeur est  $\vec{u} \left( \begin{array}{c} -b \\ a \end{array} \right)$ .

Exemple(s)

a) Un vecteur directeur de la droite d'équation  $3x + 4y + 5 = 0$  est  $\vec{u} \left( \begin{array}{c} -4 \\ 3 \end{array} \right)$ .

b) Un vecteur directeur de la droite d'équation  $-x - 2y + 4 = 0$  est  $\vec{u} \left( \begin{array}{c} -(-2) \\ -1 \end{array} \right) = \vec{u} \left( \begin{array}{c} 2 \\ -1 \end{array} \right)$ .

c) Un vecteur directeur de la droite d'équation  $x + 2 = 0$  est  $\vec{u} \left( \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right)$ .

d) Un vecteur directeur de la droite d'équation  $y - 3 = 0$  est  $\vec{u} \left( \begin{array}{c} -1 \\ 0 \end{array} \right)$ .

### 3. Équations cartésiennes d'une droite

f) Comment déterminer une équation cartésienne d'une droite connaissant un de ses points  $A$  et un vecteur directeur  $\vec{u}$  ?

Méthode

On exprime que dire qu'un point  $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  est sur la droite équivaut à dire que  $\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0$ .

Exemple(s)

Détermination d'une équation cartésienne de la droite  $d$  passant par  $A \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$  et de vecteur directeur  $\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$  :

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in d \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+2 & 4 \\ y-3 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow 5(x+2) - 4(y-3) = 0 \Leftrightarrow 5x - 4y + 22 = 0.$$

Une équation de  $d$  est  $5x - 4y + 22 = 0$

### 3. Équations cartésiennes d'une droite

g) Comment déterminer une équation cartésienne d'une droite connaissant deux de ses points  $A$  et  $B$  ( $A \neq B$ ) ?

Méthode

On exprime que dire qu'un point  $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  est sur la droite équivaut à dire que  $\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0$ .

Exemple(s)

a) Détermination d'une équation cartésienne de la droite  $d$  passant par  $A \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$  et  $B \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$  :

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in d \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-2 & -5 \\ y-7 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow -3(x-2) - (-5)(y-7) = 0 \Leftrightarrow -3x + 5y - 29 = 0. \text{ Une équation de } d \text{ est } 3x + 5y - 29 = 0$$

b) Détermination d'une équation cartésienne de la droite  $d$  passant par  $C \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $D \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$  :

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in d \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CD}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+1 & 8 \\ y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow x+1 - 8y = 0 \Leftrightarrow x - 8y + 1 = 0. \text{ Une équation de } d \text{ est } x - 8y + 1 = 0$$

### 3. Équations cartésiennes d'une droite

**h) Comment déterminer si la droite  $d$  d'équation  $ax + by + c = 0$  est parallèle à la droite  $d'$  d'équation  $a'x + b'y + c' = 0$  ?**

Méthode

On détermine si les vecteurs directeurs  $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$  et  $\vec{u}' \begin{pmatrix} -b' \\ a' \end{pmatrix}$  des deux droites sont colinéaires en vérifiant si leur déterminant est nul.

Exemple(s)

La droite  $d$  d'équation  $3x - 12y + 7 = 0$  est-elle parallèle à la droite  $d'$  d'équation  $-2x + 8y - 1 = 0$  ?

Un vecteur directeur de  $d$  est  $\vec{u} \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \end{pmatrix}$  et un vecteur directeur de  $d'$  est  $\vec{u}' \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \end{pmatrix}$ .

$$\det(\vec{u}, \vec{u}') = \begin{vmatrix} 12 & -8 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 12 \times (-2) - 3 \times (-8) = 0.$$

$\vec{u}$  et  $\vec{u}'$  étant colinéaires, on peut en conclure que les droites  $d$  et  $d'$  sont parallèles.

### 3. Équations cartésiennes d'une droite

i) Comment déterminer une équation de la droite  $d'$  parallèle à la droite  $d$  d'équation  $ax + by + c = 0$  et passant par un point  $A$  ?

Méthode

On détermine un vecteur directeur  $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$  de  $d$  (qui est donc aussi un vecteur directeur de  $d'$ ) et on exprime que dire qu'un point  $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  est sur  $d'$  équivaut à dire que  $\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0$ .

Exemple(s)

Détermination d'une équation de la droite  $d'$  parallèle à la droite  $d$  d'équation  $3x - 4y + 1 = 0$  et passant par le point  $A \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$  :

Un vecteur directeur de  $d$  (et donc aussi de  $d'$ ) est  $\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in d' \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+5 & 4 \\ y-1 & 3 \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow 3(x+5) - 4(y-1) = 0 \Leftrightarrow 3x - 4y + 19 = 0$ . Une équation de  $d'$  est  $3x - 4y + 19 = 0$



## 4. Équation réduite d'une droite non parallèle à l'axe des ordonnées

### a) Définition

#### Propriété(s)

Dans un repère du plan, toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées admet une équation, dite **équation réduite**, de la forme  $y = mx + p$ . Cette forme est unique et  $m$  est appelé **coefficient directeur** de la droite ( $p$  est lui appelé ordonnée à l'origine).

#### Démonstration

Si une droite  $d$  d'équation cartésienne  $ax + by + c = 0$  n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées alors nécessairement  $b \neq 0$ . Et donc,  $ax + by + c = 0 \Leftrightarrow by = -ax - c \Leftrightarrow y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ . On a bien  $y = mx + p$  en prenant  $m = -\frac{a}{b}$  et  $p = -\frac{c}{b}$ .

### b) Propriétés

#### Propriété(s)

Si  $y = mx + p$  est l'équation réduite d'une droite alors un de ses vecteurs directeurs est  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ .

#### Démonstration

Démonstration :  $y = mx + p \Leftrightarrow mx - y + p = 0 \Leftrightarrow ax + by + c = 0$  avec  $a = m$ ,  $b = -1$  et  $c = p$ . Un vecteur directeur est  $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = \vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$

## 4. Équation réduite d'une droite non parallèle à l'axe des ordonnées

### Propriété(s)

Si deux points distincts  $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$  et  $B \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$  sont sur la droite d'équation réduite  $y = mx + p$  alors on a  $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ .

On dit que le coefficient directeur d'une droite est égal à  $\frac{\text{différence des ordonnées}}{\text{différence des abscisses}}$ .

### Démonstration

$$y_B - y_A = mx_B + p - (mx_A + p) = mx_B + p - mx_A - p = m(x_B - x_A)$$

### Propriété(s)

Dire que deux droites non parallèles à l'axe des ordonnées sont **parallèles** équivaut à dire qu'elles ont le **même coefficient directeur**.

### Démonstration

Dire que la droite  $d$  d'équation réduite  $y = mx + p$  est parallèle à la droite  $d'$  d'équation réduite  $y = m'x + p'$  équivaut à dire que les vecteurs directeurs  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$  et  $\vec{u}' \begin{pmatrix} 1 \\ m' \end{pmatrix}$  sont colinéaires. Or,  $\det(\vec{u}, \vec{u}') = 0 \Leftrightarrow m = m'$

## 4. Équation réduite d'une droite non parallèle à l'axe des ordonnées

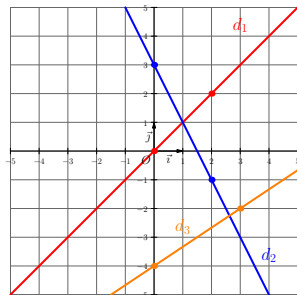
## c) Comment tracer une droite connaissant son équation réduite ?

## Méthode

On détermine les coordonnées de deux points distincts en prenant deux  $x$  différents.

## Exemple(s)

- a) Tracer la droite  $d_1$  d'équation  $y = x$ .  
Si  $x = 0$ ,  $y = 0$ . La droite passe par le point d'abscisse 0 et d'ordonnée 0.  
Si  $x = 2$ ,  $y = 2$ . La droite passe par le point d'abscisse 2 et d'ordonnée 2.
- b) Tracer la droite  $d_2$  d'équation  $y = -2x + 3$ .  
Si  $x = 0$ ,  $y = 3$ . La droite passe par le point d'abscisse 0 et d'ordonnée 3.  
Si  $x = 2$ ,  $y = -2 \times 2 + 3 = -1$ . La droite passe par le point d'abscisse 2 et d'ordonnée  $-1$ .
- c) Tracer la droite  $d_3$  d'équation  $y = \frac{2}{3}x - 4$ .  
Si  $x = 0$ ,  $y = -4$ . La droite passe par le point d'abscisse 0 et d'ordonnée  $-4$ .  
Si  $x = 3$ ,  $y = \frac{2}{3} \times 3 - 4 = -2$ . La droite passe par le point d'abscisse 3 et d'ordonnée  $-2$ .



## 4. Équation réduite d'une droite non parallèle à l'axe des ordonnées

d) Comment déterminer l'équation réduite d'une droite connaissant deux de ses points  $A$  et  $B$  ?

Méthode

- On calcule  $m = \frac{\text{différence des ordonnées}}{\text{différence des abscisses}} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$  ;
- On détermine  $p$  en exprimant que l'on doit avoir  $y_A = mx_A + p$  (ou  $y_B = mx_B + p$ )

Exemple(s)

- Détermination de l'équation réduite de la droite passant par  $A \left( \begin{array}{c} 1 \\ 3 \end{array} \right)$  et  $B \left( \begin{array}{c} 2 \\ 5 \end{array} \right)$  :

$$m = \frac{5 - 3}{2 - 1} = 2$$

$$y_A = mx_A + p \Leftrightarrow 3 = 2 \times 1 + p \Leftrightarrow p = 1.$$

L'équation réduite de  $(AB)$  est  $y = 2x + 1$ .

- Détermination de l'équation réduite de la droite passant par  $A \left( \begin{array}{c} \frac{3}{2} \\ 0 \end{array} \right)$  et  $B \left( \begin{array}{c} 1 \\ -4 \end{array} \right)$  :

$$m = \frac{-4 - 0}{1 - \frac{3}{2}} = \frac{-4}{-\frac{1}{2}} = 8$$

$$y_A = mx_A + p \Leftrightarrow 0 = 8 \times \frac{3}{2} + p \Leftrightarrow p = -12.$$

L'équation réduite de  $(AB)$  est  $y = 8x - 12$ .

Fin du chapitre