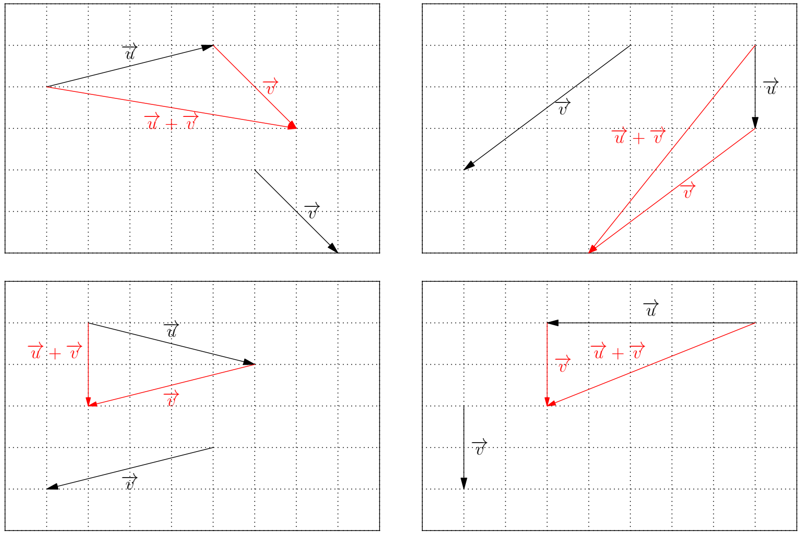
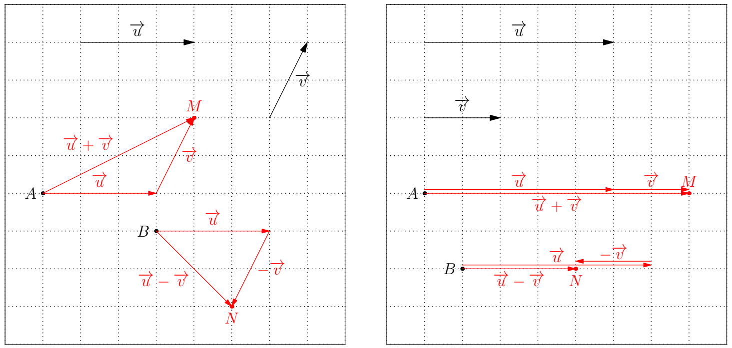
Vecteurs du plan

▶ Exercice n°1

1. On trace le représentant de $\overrightarrow{v}$ ayant pour origine l'extrémité de $\overrightarrow{u}$.
2. Le vecteur $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ s'obtient en joignant l'origine de $\overrightarrow{u}$ avec l'extrémité du représentant de $\overrightarrow{v}$ que l'on vient de placer au bout de $\overrightarrow{u}$.



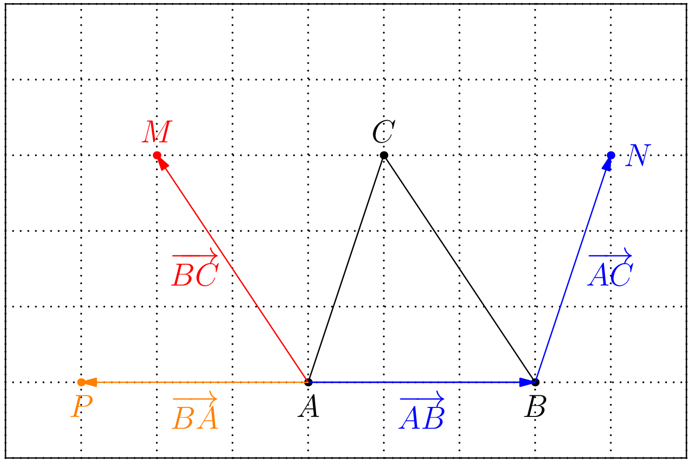
▶ Exercice n°2



- Pour placer M : on trace le représentant de $\overrightarrow{u}$ partant de A et on met un représentant de $\overrightarrow{v}$ au bout.
- Pour placer N : on trace le représentant de $\overrightarrow{u}$ partant de B et on met un représentant de $-\overrightarrow{v}$ au bout.

▶ Exercice n°3

- Pour M : on trace le représentant de $\overrightarrow{BC}$ partant de A.
- Pour N : on trace le représentant de $\overrightarrow{AB}$ partant de A, puis on met un représentant de $\overrightarrow{AC}$ au bout.
- Pour P : on transforme d'abord le $-\overrightarrow{AC}$ en $\overrightarrow{CA}$. On a donc, $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA}$ (d'après la relation de Chasles). Il reste donc à tracer le représentant de $\overrightarrow{BA}$ partant de A pour aboutir à P.

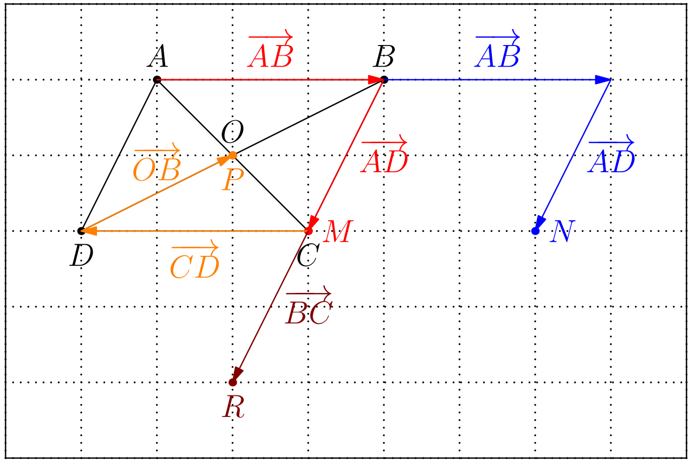


▶ Exercice n°4

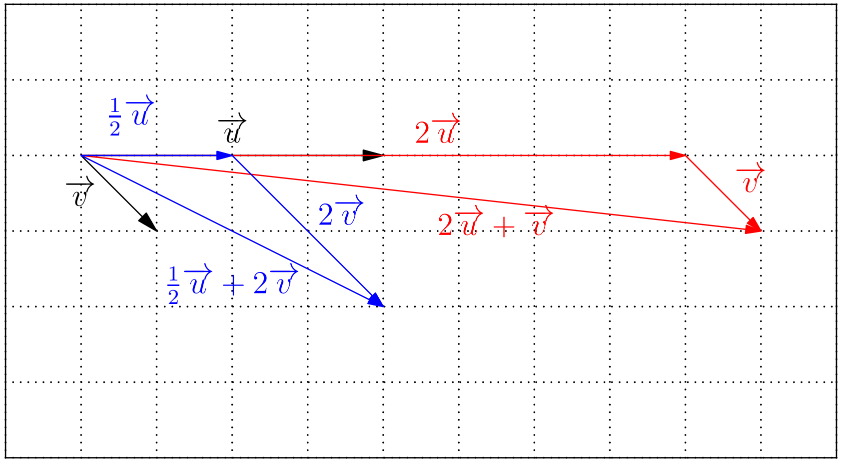
- $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{BP}$
- $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AC}$
- $\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{CP}$
- $\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PB}$
- $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA} == \overrightarrow{CM}$
- $\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{NA} = \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{NB} = \overrightarrow{CB}$

▶ Exercice n°5

- Pour M : on trace le représentant de $\overrightarrow{AB}$ partant de A, puis on met un représentant de $\overrightarrow{AD}$ au bout.
- Pour N : on trace le représentant de $\overrightarrow{AB}$ partant de B, puis on met un représentant de $\overrightarrow{AD}$ au bout.
- Pour P : on trace le représentant de $\overrightarrow{CD}$ partant de C, puis on met un représentant de $\overrightarrow{OB}$ au bout.
- Pour R : $\overrightarrow{CR} = \overrightarrow{BO} - \overrightarrow{CO} \Leftrightarrow \overrightarrow{CR} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} \Leftrightarrow \overrightarrow{CR} = \overrightarrow{BC}$; on trace le représentant de $\overrightarrow{BC}$ partant de C.

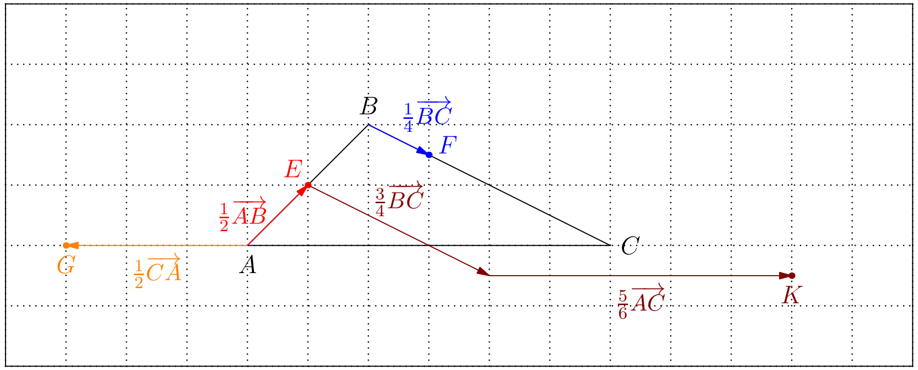


▶ Exercice n°6



▶ Exercice n°7

- Pour E : $2\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$; on trace le représentant de $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ partant de A.
- Pour F : $4\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$; on trace le représentant de $\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ partant de B.
- Pour G : $2\overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$; on trace le représentant de $\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$ partant de A.
- Pour K : $\overrightarrow{EK} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{BC} - \dfrac{5}{6}\overrightarrow{CA} \Leftrightarrow \overrightarrow{EK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC} + \frac{5}{6}\overrightarrow{AC}$; on trace le représentant de $\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$ partant de E, puis on met un représentant de $\frac{5}{6}\overrightarrow{AC}$ au bout.



▶ Exercice n°8

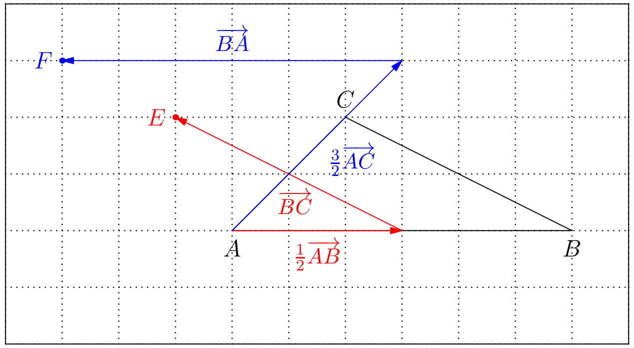
1. $\vec{u} = \overrightarrow{A\underline{B}} + \overrightarrow{\underline{B}C} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{A\underline{C}} + \overrightarrow{\underline{C}D} = \overrightarrow{AD}$
2. $\vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$
3. $\vec{w} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{A\underline{B}} + \overrightarrow{\underline{B}C} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{A\underline{C}} + \overrightarrow{\underline{C}A} = \vec{0}$
4. $\vec{x} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{A\underline{B}} + \overrightarrow{\underline{B}D}$
$= \vec{0} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD}$
5. $\vec{y} = \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{A\underline{C}} + \overrightarrow{\underline{C}B} + \overrightarrow{C\underline{B}} + \overrightarrow{\underline{B}A} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{C\underline{A}} + \overrightarrow{\underline{A}B} = \overrightarrow{CB}$
6. $\vec{z} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\underline{C}} + \overrightarrow{\underline{C}B} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AB}$

▶ Exercice n°9

1. $\vec{u} - 2\left(\vec{u} + \vec{v}\right) - \dfrac{1}{3}\vec{v} = \vec{u} - 2\vec{u} - 2\vec{v} - \dfrac{1}{3}\vec{v} = -\vec{u} - 2\times\dfrac{3}{3}\vec{v} - \dfrac{1}{3}\vec{v} = -\vec{u} - \dfrac{7}{3}\vec{v}$
2. $-\dfrac{2}{5}\vec{u} + \vec{u} - \dfrac{1}{4}\left(\vec{u} - \vec{v}\right) = -\dfrac{2}{5}\vec{u} + \vec{u} - \dfrac{1}{4}\vec{u} + \dfrac{1}{4}\vec{v}$
$= -\dfrac{2}{5}\times\dfrac{4}{4}\vec{u} + \dfrac{20}{20}\vec{u} - \dfrac{1}{4}\times\dfrac{5}{5}\vec{u} + \dfrac{1}{4}\vec{v} = \dfrac{7}{20}\vec{u} + \dfrac{1}{4}\vec{v}$
3. $\dfrac{1}{2}\left(\vec{u} - \vec{v}\right) - \dfrac{1}{3}\left(\vec{u} + \vec{v}\right) = \dfrac{1}{2}\vec{u} - \dfrac{1}{2}\vec{v} - \dfrac{1}{3}\vec{u} - \dfrac{1}{3}\vec{v}$
$= \dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{3}\vec{u} - \dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{2}\vec{u} - \dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{3}\vec{v} - \dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{2}\vec{v} = \dfrac{1}{6}\vec{v} - \dfrac{5}{6}\vec{v}$

▶ Exercice n°10

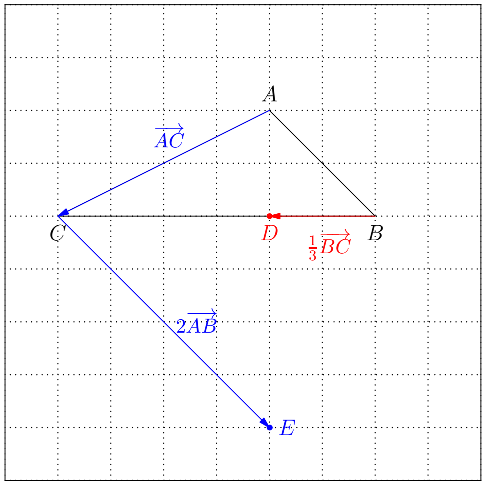
1.



2. Les points E et F étant définis dans l'énoncé avec le point A, on va décomposer $\overrightarrow{EF}$ en passant par le point A :
$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AF} = -\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA}$
$= \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{2}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$
$= \frac{3}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) - \overrightarrow{BC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC} - \frac{2}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$
Les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont donc colinéaires. On peut en déduire que les droites (EF) et (BC) sont parallèles.

▶ Exercice n°11

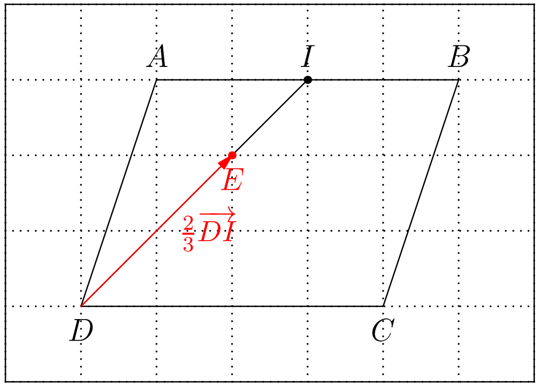
1.



2. Afin de montrer que les points A , D et E sont alignés, on va prouver que les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont colinéaires.
On sait déjà que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AB}$
Le point D étant défini avec le point B dans l'énoncé, on va décomposer $\overrightarrow{AD}$ en passant par le point B : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$. On en déduit que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.
Pour pouvoir comparer avec $\overrightarrow{AE}$, il faudrait $\overrightarrow{AD}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$:
$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{3}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. On a donc, $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$.
Les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont bien colinéaires.

▶ Exercice n°12

1.



2. Pour montrer que les points A , C et E sont alignés, on va prouver que les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
Le point E étant défini avec le point D dans l'énoncé, on va décomposer $\overrightarrow{AE}$ en passant par le point D : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AI}\right)$
$= \overrightarrow{AD} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$.
Or, $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$ car $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. On a donc :
$\overrightarrow{AE} = \frac{3}{3}\overrightarrow{AD} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DC} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}\right) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.
Les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont bien colinéaires.