Inéquations

► Exercice n°1

a) $x - 2 \leqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 2$. $S = \left]-\infty\,;\,2\right]$

b) $x + 4 > 0 \Leftrightarrow x > -4$. $S = \left]-4\,;\,+\infty\right[$

c) $2x + 7 > 0 \Leftrightarrow 2x > -7 \Leftrightarrow x > -\frac{7}{2}$. $S = \left]-\frac{7}{2}\,;\,+\infty\right[$

d) $\dfrac{1-3x}{4} \geqslant 0 \Leftrightarrow 1 - 3x \geqslant 0 \Leftrightarrow 1 \geqslant 3x \Leftrightarrow \frac{1}{3} \geqslant x$. $S = \left]-\infty\,;\,\frac{1}{3}\right]$

e) $3x - 3 < 1 - 2x \Leftrightarrow 3x + 2x < 1 + 3 \Leftrightarrow 5x < 4 \Leftrightarrow x < \frac{4}{5}$. $S = \left]-\infty\,;\,\frac{4}{5}\right[$

f) $2(x-3) \geqslant 8 - 3x \Leftrightarrow 2x - 6 \geqslant 8 - 3x \Leftrightarrow 2x + 3x \geqslant 8 + 6 \Leftrightarrow 5x \geqslant 14 \Leftrightarrow x \geqslant \frac{14}{5}$.
$S = \left[\frac{14}{5}\,;\,+\infty\right[$

g) $2(x+1) < 3 + 2x \Leftrightarrow 2x + 2 < 3 + 2x \Leftrightarrow 2x - 2x < 3 - 2 \Leftrightarrow 0 < 1$. C'est vrai pour tout x, donc $S = \mathbb{R}$.

h) $\dfrac{x-2}{3} - \dfrac{1-x}{2} \geqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{2}{2} \times \dfrac{(x-2)}{3} - \dfrac{3}{3} \times \dfrac{(1-x)}{2} \geqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x - 4 - 3 + 3x}{6} \geqslant 0$
$\Leftrightarrow \dfrac{5x-7}{6} \geqslant 0 \Leftrightarrow 5x - 7 \geqslant 0 \Leftrightarrow 5x \geqslant 7 \Leftrightarrow x \geqslant \frac{7}{5}$. $S = \left[\frac{7}{5}\,;\,+\infty\right[$

i) $\dfrac{x}{2} - \dfrac{4-x}{4} > 5 \Leftrightarrow \dfrac{2}{2} \times \dfrac{x}{2} - \dfrac{(4-x)}{4} > 5 \Leftrightarrow \dfrac{2x - 4 + x}{4} > 5 \Leftrightarrow \dfrac{3x-4}{4} > 5$
$\Leftrightarrow 3x - 4 > 20 \Leftrightarrow 3x > 24 \Leftrightarrow x > \frac{24}{3} \Leftrightarrow x > 8$. $S = \left]8\,;\,+\infty\right[$

► Exercice n°2

a) $3x - 4 = 0 \Leftrightarrow 3x = 4 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$
Signe du coefficient devant x (signe de 3, donc « + » ici) après le « 0 » :

x	$-\infty$		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$3x-4$		$-$	0	$+$	

b) $\frac{2}{3}x + 5 = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3}x = -5 \Leftrightarrow x = -5 \times \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{15}{2}$
Signe du coefficient devant x (signe de $\frac{2}{3}$, donc « + » ici) après le « 0 » :

x	$-\infty$		$-\frac{15}{2}$		$+\infty$
$\frac{2}{3}x+5$		$-$	0	$+$	

c) $-3x + 7 = 0 \Leftrightarrow -3x = -7 \Leftrightarrow x = \frac{7}{3}$
Signe du coefficient devant x (signe de -3, donc « - » ici) après le « 0 » :

x	$-\infty$		$\frac{7}{3}$		$+\infty$
$-3x+7$		$+$	0	$-$	

d) $8 - \frac{3}{2}x = 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{2}x = -8 \Leftrightarrow x = -8 \times \frac{-2}{3} \Leftrightarrow x = \frac{16}{3}$
Signe du coefficient devant x (signe de $-\frac{3}{2}$, donc « - » ici) après le « 0 » :

x	$-\infty$		$\frac{16}{3}$		$+\infty$
$8-\frac{3}{2}x$		$+$	0	$-$	

► Exercice n°3

a) $x - 4$ s'annule pour $x = 4$; signe de 1 après le « 0 »
$x - 3$ s'annule pour $x = 3$; signe de 1 après le « 0 »

x	$-\infty$		3		4		$+\infty$
$x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
$x-3$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-4)(x-3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

b) $1 - 2x$ s'annule pour $x = \frac{1}{2}$; signe de -2 après le « 0 »
$x + 2$ s'annule pour $x = -2$; signe de 1 après le « 0 »

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$1-2x$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$(1-2x)(x+2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

c) $5x$ s'annule pour $x = 0$; signe de 5 après le « 0 »
$3x - 2$ s'annule pour $x = \frac{2}{3}$; signe de 3 après le « 0 »
$x + 5$ s'annule pour $x = -5$; signe de 1 après le « 0 »

x	$-\infty$		-5		0		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$5x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$3x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+5$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$5x(3x-2)(x+5)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

d) On factorise d'abord $x^2 - 9$: $x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$
$x - 3$ s'annule pour $x = 3$; signe de 1 après le « 0 »
$x + 3$ s'annule pour $x = -3$; signe de 1 après le « 0 »

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2-9		$+$	0	$-$	0	$+$	

e) On factorise d'abord $1 - x^2$: $1 - x^2 = (1-x)(1+x)$
$1 - x$ s'annule pour $x = 1$; signe de -1 après le « 0 »
$1 + x$ s'annule pour $x = -1$; signe de 1 après le « 0 »
$x - 4$ s'annule pour $x = 4$; signe de 1 après le « 0 »

x	$-\infty$		-1		1		4		$+\infty$
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$1+x$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-4$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$(1-x^2)(x-4)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

f) $3 - x$ s'annule pour $x = 3$; signe de -1 après le « 0 »
$2 + x$ s'annule pour $x = -2$; signe de 1 après le « 0 »

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$3-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$2+x$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{3-x}{2+x}$		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	

« double barre » pour la valeur de x qui annule le dénominateur $2 + x$.
g) $4 - 2x$ s'annule pour $x = 2$; signe de -2 après le « 0 »
$x + 3$ s'annule pour $x = -3$; signe de 1 après le « 0 »

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$4-2x$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{4-2x}{x+3}$		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	

« double barre » pour la valeur de x qui annule le dénominateur $x + 3$.

h) x s'annule pour $x = 0$; signe de 1 après le « 0 »
$x + 1$ s'annule pour $x = -1$; signe de 1 après le « 0 »
$3x - 2$ s'annule pour $x = \frac{2}{3}$; signe de 3 après le « 0 »

x	$-\infty$		-1		0		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$3x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{x(x+1)}{3x-2}$		$-$	0	$+$	0	$-$	$\|$	$+$	

« double barre » pour la valeur de x qui annule le dénominateur $3x - 2$.
i) On factorise d'abord $x^2 - 4$: $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$
$x - 2$ s'annule pour $x = 2$; signe de 1 après le « 0 »
$x + 2$ s'annule pour $x = -2$; signe de 1 après le « 0 »
$1 - x$ s'annule pour $x = 1$; signe de 1 après le « 0 »

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$\frac{x^2-4}{1-x}$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	0	$-$	

« double barre » pour la valeur de x qui annule le dénominateur $1 - x$.

► Exercice n°4

Sont entourés dans la dernière ligne des tableaux, les signes et les 0 correspondants aux ensembles des solutions cherchés.
a) $x\,(x-1) \geqslant 0$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x(x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S =]-\infty\,;\,0] \cup [1\,;\,+\infty[$

b) $(2x-3)(1-7x)<0$

x	$-\infty$		$\frac{1}{7}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$2x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$1-7x$		$+$	0	$-$		$-$	
$(2x-3)(1-7x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$S=\left]-\infty\,;\,\frac{1}{7}\right[\cup\left]\frac{3}{2}\,;\,+\infty\right[$

c) $x^2-16<0 \Leftrightarrow (x-4)(x+4)<0$

x	$-\infty$		-4		4		$+\infty$
$x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2-16		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S=\left]-4\,;\,4\right[$

d) $\left(4x^2-9\right)(x+1)>0 \Leftrightarrow (2x-3)(2x+3)(x+1)>0$

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		-1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$2x-3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x+3$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$(4x^2-9)(x+1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$S=\left]-\frac{3}{2}\,;\,1\right[\cup\left]\frac{3}{2}\,;\,+\infty\right[$

e) $\dfrac{3-x}{x+4}>0$

x	$-\infty$		-4		3		$+\infty$
$3-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{3-x}{x+4}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

$S=\left]-4\,;\,3\right[$

f) $\dfrac{5-2x}{1-x}\geqslant 0$

x	$-\infty$		1		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$5-2x$		$+$		$+$	0	$-$	
$1-x$		$+$	0	$-$		$-$	
$\frac{5-2x}{1-x}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

$S=\left]-\infty\,;\,1\right[\cup\left[\frac{5}{2}\,;\,+\infty\right[$

g) $\dfrac{x(x+1)}{3-2x}\leqslant 0$

x	$-\infty$		-1		0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$3-2x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{x(x+1)}{3-2x}$		$+$	0	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

$S=\left[-1\,;\,0\right]\cup\left]\frac{3}{2}\,;\,+\infty\right[$

h) $\dfrac{x^2-9}{1-x}>0 \Leftrightarrow \dfrac{(x-3)(x+3)}{1-x}>0$

x	$-\infty$		-3		1		3		$+\infty$
$x-3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$\frac{x^2-9}{1-x}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

$S=\left]-\infty\,;\,-3\right[\cup\left]1\,;\,3\right[$

i) $\dfrac{2x+1}{x+2}\leqslant 1 \Leftrightarrow \dfrac{2x+1}{x+2}-1\leqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x+1}{x+2}-\dfrac{(x+2)}{x+2}\leqslant 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{2x+1-x-2}{x+2}\leqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{x+2}\leqslant 0$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{x-1}{x+2}$		$+$	$\|$	$\ominus$	0	$+$	

$S =]-2\,;\,1]$

j) $\dfrac{1-3x}{1-x} \geqslant 2 \Leftrightarrow \dfrac{1-3x}{1-x} - 2 \geqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{1-3x}{1-x} - 2 \times \dfrac{1-x}{1-x} \geqslant 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{1-3x-2(1-x)}{1-x} \geqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{1-3x-2+2x)}{1-x} \geqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{-x-1}{1-x} \geqslant 0$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$-x-1$		$+$	0	$-$		$-$	
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{-x-1}{1-x}$		$\oplus$	0	$-$	$\|$	$\oplus$	

$S =]-\infty\,;\,-1] \cup]1\,;\,+\infty[$

k) $\dfrac{x+5}{x-1} \leqslant \dfrac{x-3}{x+2} \Leftrightarrow \dfrac{x+5}{x-1} - \dfrac{x-3}{x+2} \leqslant 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{(x+5)}{(x-1)} \times \dfrac{(x+2)}{(x+2)} - \dfrac{(x-3)}{(x+2)} \times \dfrac{(x-1)}{(x-1)} \leqslant 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2+5x+2x+10-x^2+x+3x-3}{(x-1)(x+2)} \leqslant 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{11x+7}{(x-1)(x+2)} \leqslant 0$

x	$-\infty$		-2		$-\frac{7}{11}$		1		$+\infty$
$11x+7$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\frac{11x+7}{(x-1)(x+2)}$		$\ominus$	$\|$	$+$	0	$\ominus$	$\|$	$+$	

$S =]-\infty\,;\,-2] \cup \left[-\frac{7}{11}\,;\,1\right[$

l) $\dfrac{x+3}{x^2-1} \geqslant \dfrac{3}{x-1} \Leftrightarrow \dfrac{x+3}{(x-1)(x+1)} - \dfrac{3}{x-1} \geqslant 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x+3}{(x-1)(x+1)} - \dfrac{3}{(x-1)} \times \dfrac{(x+1)}{(x+1)} \geqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{x+3-3x+3}{(x-1)(x+1)} \geqslant 0$

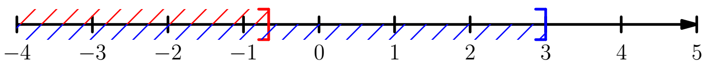
$\Leftrightarrow \dfrac{-2x}{(x-1)(x+1)} \geqslant 0$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$-2x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\frac{-2x}{(x-1)(x+1)}$		$\oplus$	$\|$	$-$	0	$\oplus$	$\|$	$-$	

$S =]-\infty\,;\,-1[\cup [0\,;\,1[$

▶ Exercice n°5

$\begin{cases} 2x-3 > 5x-1 \\ x+4 \geqslant 3x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3+1 > 5x-2x \\ 4+2 \geqslant 3x-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 > 3x \\ 6 \geqslant 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{2}{3} > x \\ 3 \geqslant x \end{cases}$



$S = \left]-\infty\,;\,\frac{2}{3}\right[$

▶ Exercice n°6

Affirmation fausse. Contre-exemple : avec $x = -2$, on a bien $x^2 > 1$ sans avoir $x > 1$.

▶ Exercice n°7

1.

```
Variables: n
DEBUT_ALGORITHME
  Lire n
  SI (30+0,75n < n) ALORS
    AFFICHER "l'abonnement est rentable"
    FIN_SI
  SINON
    AFFICHER "l'abonnement n'est pas rentable"
    FIN_SINON
FIN_ALGORITHME
```

2. $30+0{,}75n < n \Leftrightarrow 30 < n - 0{,}75n \Leftrightarrow 30 < 0{,}25n \Leftrightarrow \frac{30}{0{,}25} < n \Leftrightarrow n > 120$