Kit de survie - Spécialité 1re générale

1. Calculs de base

a) Exemples de calculs avec des fractions

- $\frac{1}{2}+\frac{5}{3}=\frac{1}{2}\times\frac{3}{3}+\frac{5}{3}\times\frac{2}{2}=\frac{3+10}{2\times 3}=\frac{13}{6}$
- $\frac{3}{4}\times\frac{5}{2}=\frac{3\times 5}{4\times 2}=\frac{15}{8}$
- $\frac{1}{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}$
- $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{2}}=\frac{2}{3}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{15}$

b) racines

Pour tout $a>0$:

- $(\sqrt{a})^2=a$
- $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$
- $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

c) Identités remarquables

Pour tous les réels a et b :

$$(a+b)^2 \underset{\text{factoriser}}{\overset{\text{développer}}{=}} a^2+2ab+b^2$$

$$(a-b)^2 \underset{\text{factoriser}}{\overset{\text{développer}}{=}} a^2-2ab+b^2$$

$$(a-b)(a+b) \underset{\text{factoriser}}{\overset{\text{développer}}{=}} a^2-b^2$$

d) Puissances

Pour tous les réels non nuls a et b et pour tous les entiers n et p :

- $a^n\times a^p=a^{n+p}$
- $(a^n)^p=a^{np}$
- $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$
- $\frac{a^n}{a^p}=a^{n-p}$
- $(ab)^n=a^n\times b^n$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$

2. Pourcentages

Prendre x % d'une grandeur revient à la multiplier par $\frac{x}{100}$.

▶ *Exemple :* 5 % de 640 $=\frac{5}{100}\times 640=32$

Pour déterminer la proportion en pourcentage d'une partie A par rapport à un total B, il suffit de calculer $\frac{A}{B}\times 100$.

▶ *Exemple :* La proportion en pourcentage de 18 par rapport à 120 est égale à 15%, car $\frac{18}{120}\times 100=15$.

Augmenter une grandeur de x % revient à la multiplier par $\left(1+\frac{x}{100}\right)$.
Diminuer une grandeur de x % revient à la multiplier par $\left(1-\frac{x}{100}\right)$.

▶ *Exemples :*
- augmenter une valeur de 20 % revient à la multiplier par $\left(1+\frac{20}{100}\right)=1{,}2$.
- le prix d'un produit valant 15 euros après une baisse de 6 % est égal à $\left(1-\frac{6}{100}\right)\times 15=0{,}94\times 15=14{,}1$ euros.
- Diminuer une grandeur de 15 %, puis l'augmenter de 20 % revient à la multiplier par : $\left(1-\frac{15}{100}\right)\times\left(1+\frac{20}{100}\right)=0{,}85\times 1{,}2=1{,}02$. (ce qui revient à lui appliquer une hausse globale de 2 %)

(Rappel : les pourcentages ne s'ajoutent pas lors d'évolutions successives, mais les coefficients multiplicateurs se multiplient)

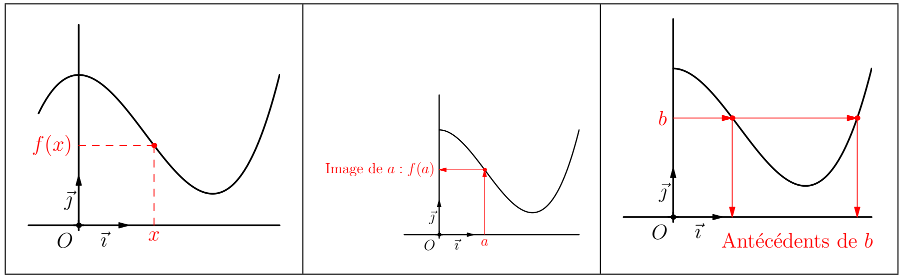
▶ **Remarque :**
- Si on augmente à intervalles réguliers une grandeur de x % , on peut modéliser l'évolution de la grandeur par une suite géométrique de raison $1+\frac{x}{100}$.
- Si on diminue à intervalles réguliers une valeur de x % , on peut modéliser l'évolution de la grandeur par une suite géométrique de raison $1-\frac{x}{100}$.

Pour déterminer l'évolution d'une grandeur en pourcentage, il suffit de calculer : $\frac{\text{valeur finale}-\text{valeur initiale}}{\text{valeur initiale}}\times 100$

▶ *Exemple :* Un produit passant de 64 à 72 euros subit une hausse de 12,5%, car $\frac{72-64}{64}\times 100=12{,}5$.

3. Fonctions

a) Courbe et lecture graphique



b) Parité

• Une fonction f définie sur une partie I de $\mathbb{R}$ est dite **paire** si I est symétrique par rapport à 0 et si, pour tout x de I, on a $f(-x) = f(x)$.
Dans un repère orthogonal, la courbe représentative d'une fonction paire est **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées**.
• Une fonction f définie sur une partie I de $\mathbb{R}$ est dite **impaire** si I est symétrique par rapport à 0 et si, pour tout x de I, on a $f(-x) = -f(x)$.
La courbe représentative d'une fonction impaire est **symétrique par rapport à l'origine du repère**.

4. Premier degré

a) Équations de la forme $ax + b = 0$

Résolution de $ax + b = 0$

La résolution de ces équations est basée sur les deux opérations suivantes :

- Opération n°1 : $ax+b = 0 \Leftrightarrow ax = -b$ (transposition d'un élément d'un membre à l'autre ; on change le signe de l'élément qu'on transpose)
- Opération n°2 : $ax = -b \Leftrightarrow x = \dfrac{-b}{a}$ (division par le coefficient devant x ; on ne change pas le signe du coefficient par lequel on divise)

Équations sous la forme d'un produit d'expressions du 1^{er}degré

On utilise la règle : « Dire qu'un produit de deux facteurs est nul équivaut à dire que le premier facteur est nul OU que le deuxième facteur est nul »

► *Exemple :* $(2x-8)(6-3x) = 0 \Leftrightarrow 2x-8 = 0$ ou $6-3x = 0 \Leftrightarrow 2x = 8$ ou $-3x = -6 \Leftrightarrow x = \dfrac{8}{2} = 4$ ou $x = \dfrac{-6}{-3} = 2$.

b) Signe de $ax + b$

Propriété

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
signe de $ax+b$		signe de $-a$	0	signe de a	

(ce qui se résume à la règle suivante : signe du coefficient devant x après le « 0 »)

c) Équation réduite de droite

• Dans un repère du plan, toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées admet une équation, dite **équation réduite**, de la forme $y = mx + p$. m est appelé **coefficient directeur** de la droite.
• Si deux points distincts $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ sont sur la droite d'équation réduite $y = mx + p$ alors on a $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{\text{différence des ordonnées}}{\text{différence des abscisses}}$.

Détermination de l'équation réduite connaissant 2 points A et B

• On calcule $m = \dfrac{\text{différence des ordonnées}}{\text{différence des abscisses}} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$;
• On détermine p en exprimant que l'on doit avoir $y_A = mx_A + p$ (ou $y_B = mx_B + p$)

► *Exemple :* Détermination de l'équation réduite de la droite passant par $A\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$: $m = \dfrac{5-3}{2-1} = 2$; $y_A = mx_A + p \Leftrightarrow 3 = 2 \times 1 + p \Leftrightarrow p = 1$.
L'équation réduite de (AB) est $y = 2x + 1$.

Propriété

Deux droites admettant une équation réduite :
• sont parallèles si elles ont le même coefficient directeur.
• sont perpendiculaires si le produit de leur coefficient directeur est égal à -1.

5. Second degré

$\Delta = b^2 - 4ac$	Racines	Signe
Si $\Delta > 0$	Deux racines : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$; $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	(tableau 1) (en supposant que $x_1 < x_2$) « Du signe de a à l'extérieur des racines »
Si $\Delta = 0$	Une racine (dite double) : $x_1 = \dfrac{-b}{2a}$	(tableau 2) « Toujours du signe de a et s'annule pour la racine »
Si $\Delta < 0$	Pas de racines	(tableau 3) « Toujours du signe de a »

Tableau 1 :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
ax^2+bx+c		signe de a	0	signe de $(-a)$	0	signe de a	

Tableau 2 :

x	$-\infty$		x_1		$+\infty$
ax^2+bx+c		signe de a	0	signe de a	

Tableau 3 :

x	$-\infty$		$+\infty$
ax^2+bx+c		signe de a	

6. Probabilités

a) Généralités

- L'événement contraire de l'événement A est l'événement noté $\overline{A}$
- L'événement $A \cap B$ correspond à « A et B »
- L'événement $A \cup B$ correspond à « A ou B »
- Pour tous événements A et B : $0 \leqslant p(A) \leqslant 1$
  $p\left(\overline{A}\right) = 1 - p(A)$; $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
- Dans le cas de l'équiprobabilité : $p(A) = \dfrac{\text{nb de cas favorables}}{\text{nb de cas possibles}}$

b) Variable aléatoire

Si lors d'une expérience aléatoire, on associe à chaque issue possible une grandeur X, on dit que X est une **variable aléatoire** associée à l'expérience. Si on note alors x_1, x_2, $\cdots$, x_n les valeurs possibles de X et p_1, p_2, $\cdots$, p_n les probabilités que X prenne les valeurs x_1, x_2, $\cdots$, x_n :

- On appelle **loi de probabilité** de X le tableau :

Valeurs possibles de X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
Probabilités	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

- **L'espérance mathématique** de X est définie par :

$E(x) = p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n$ et correspond à la valeur moyenne théorique que prend X si on répète un grand nombre de fois l'expérience aléatoire.

c) Probabilités conditionnelles

Définition

Étant donné deux événements A et B ($B \neq \varnothing$) d'un univers Ω, on appelle probabilité de B sachant A, le réel noté $p_A(B)$ tel que :

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{p\,(\text{« de l'intersection » })}{p\,(\text{« du sachant »})}.$$

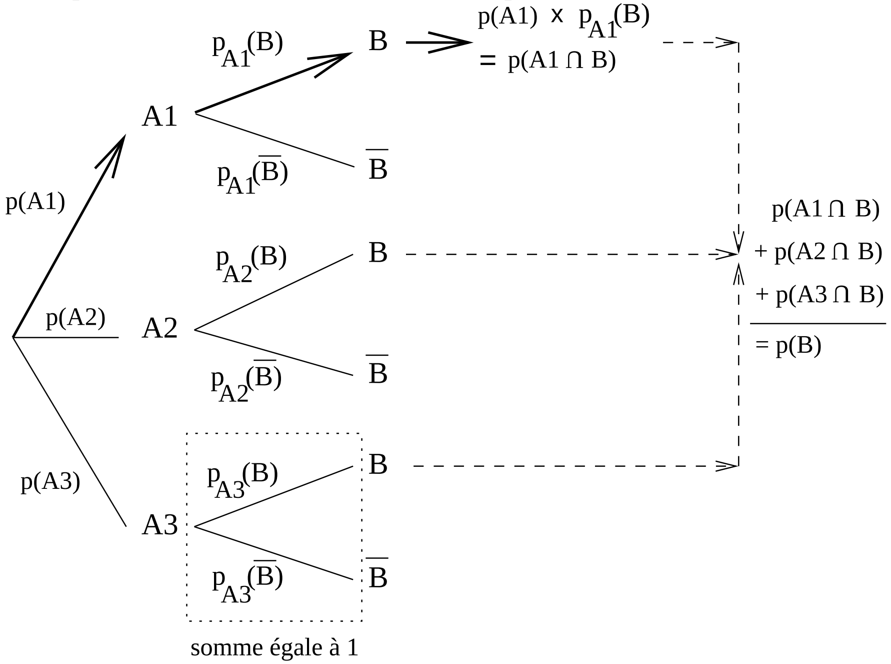
Conséquence

- $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B) = p(B) \times p_B(A)$

Formule des probabilités totales

• Si A_1, A_2,A_n sont des événements non vides deux à deux incompatibles et dont l'union est égale à l'univers alors, pour tout événement B :
• $p(B) = p\left(A_1 \cap B\right) + p\left(A_2 \cap B\right) + p\left(A_3 \cap B\right)$
$= p(A_1) \times p_{A_1}(B) + p(A_2) \times p_{A_2}(B) + p(A_3) \times p_{A_3}(B)$

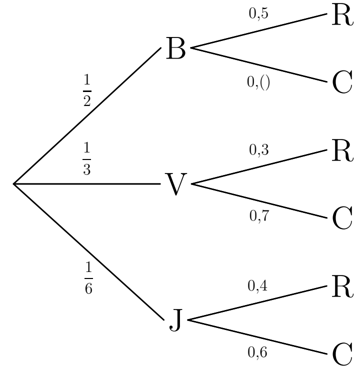
▶ **Représentation à l'aide d'un arbre pondéré**



▶ **Règles de construction et d'utilisation des arbres pondérés :**
• Sur les premières branches, on inscrit les $p\left(A_i\right)$.
• Sur les branches du type $A_i \longrightarrow B$, on inscrit $p_{A_i}(B)$.
• Le produit des probabilités inscrites sur chaque branche d'un chemin donne la probabilité de l'intersection des événements placés sur ce chemin.
• La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1 (loi des nœuds).
• La probabilité d'un événement E est la somme des probabilités des chemins qui aboutissent à E.

▶ *Exemple :* Un sac contient des jetons de trois couleurs, la moitié de blancs, le tiers de verts et le sixième de jaunes. 50% des jetons blancs, 30% des jetons verts et 40% des jetons jaunes sont ronds. Tous les autres jetons sont carrés. On tire au hasard un jeton.

a) Construction de l'arbre :



b) Quelle est la probabilité que le jeton tiré soit blanc ET rond ?
$p(B \cap R) = p(B) \times p_R(B) = \dfrac{1}{2} \times 0{,}5 = 0{,}25$.
c) Quelle est la probabilité pour que le jeton tiré soit rond ?
$p(R) = \dfrac{1}{2} \times 0{,}5 + \dfrac{1}{3} \times 0{,}3 + \dfrac{1}{6} \times 0{,}4 = \dfrac{5}{12}$.
d) Sachant qu'il est rond, quelle est la probabilité pour qu'il soit blanc ?
$p_R(B) = \dfrac{p(B \cap R)}{p(R)} = \dfrac{\frac{1}{2} \times 0{,}5}{\frac{5}{12}} = \dfrac{3}{5}$.

d) Indépendance en probabilité

Définition

• Deux événements A et B sont dits indépendants si $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.
• Ce qui revient à dire que $p_A(B) = p(B)$ ou $p_B(A) = p(A)$

7. Dérivation - Tangente - Variations de fonction

a) Dérivée des fonctions usuelles

$f(x) = b \Rightarrow f'(x) = 0$	$f(x) = ax + b \Rightarrow f'(x) = a$
$f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$	$f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$
$f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2$	$f(x) = \dfrac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$
$f(x) = \dfrac{1}{x^2} \Rightarrow f'(x) = -\dfrac{2}{x^3}$	$f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = \mathrm{e}^x \Rightarrow f'(x) = \mathrm{e}^x$	$f(x) = \mathrm{e}^{ax} \Rightarrow f'(x) = a\mathrm{e}^{ax}$

b) Opération sur les fonctions dérivables

Fonction	Fonction dérivée
$f+g$	$f'+g'$
$k\,f \quad (k$ réel$)$	$k\,f'$
$f\,g$	$f'\,g+f\,g'$

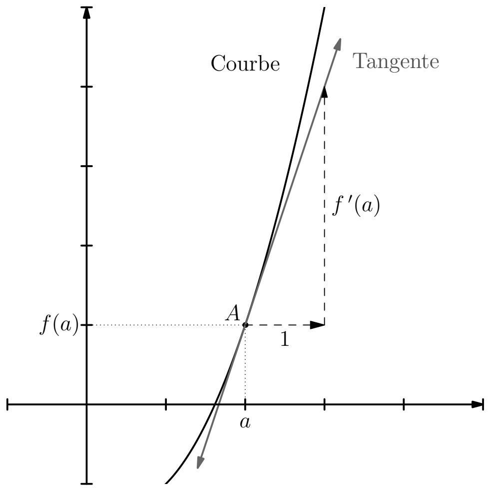
Fonction	Fonction dérivée
f^2	$2\,f'\,f$
$\dfrac{1}{f}$	$-\dfrac{f'}{f^2}$
$\dfrac{f}{g}$	$\dfrac{f'\,g-f\,g'}{g^2}$

Si $g(x)=f(ax+b)$ alors $g'(x)=af'(ax+b)$

c) Tangente

• Si f est dérivable en a alors une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse a est : $y=f(a)+f'(a)(x-a)$
(le coefficient directeur de la tangente est égale à la valeur de la dérivée)
• Pour déterminer les abscisses des éventuels points de C_f où la tangente admet un coefficient directeur égal à m, il suffit de résoudre l'équation $f'(x)=m$.

• **Construction de la tangente au point A d'abscisse a :**



• **Détermination graphique de $f'(a)$ à partir de la tangente au point A d'abscisse a :**
Si B est un autre point de la tangente, on a $f'(a)=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$.

d) Variations des fonctions dérivables

▶ **Principe général** : le signe de la dérivée donne le sens de variation d'une fonction et inversement. En particulier ;

• Si la dérivée reste strictement positive sur un intervalle (sauf en un nombre fini de points isolés où elle peut s'annuler) alors on peut affirmer que la fonction est strictement croissante sur cet intervalle ;
• Si la dérivée reste strictement négative sur un intervalle (sauf en un nombre fini de points isolés où elle peut s'annuler) alors on peut affirmer que la fonction est strictement décroissante sur cet intervalle.

8. Suites numériques

a) Suites arithmétiques

On passe d'un terme au terme suivant en ajoutant toujours le même nombre r appelé raison de la suite.
• Pour tout n : $U_{n+1}=U_n+r$; $U_n=U_0+nr$; $U_n=U_p+(n-p)r$
• Si pour tout n, $U_{n+1}-U_n=$ constante alors (U_n) est une suite arithmétique de raison égale à la constante.
• $U_p+U_{p+1}+\cdots+U_n=(n-p+1)\times\dfrac{U_p+U_n}{2}=(\text{nb de termes})\times\dfrac{\text{1er terme}+\text{dernier}}{2}$
• Si la raison r est positive, la suite est croissante.
• Si la raison r est négative, la suite est décroissante.

▶ *Exemple :*
Soit (U_n) la suite arithmétique de 1er terme $U_0=2$ et de raison $r=3$.
$U_{10}=U_0+10r=2+10\times3=32$; $U_{33}=U_0+33r=2+33\times3=101$
Pour tout n, $U_n=U_0+nr=2+3n$. $U_0+U_1+\cdots+U_{10}=11\times\dfrac{2+32}{2}=187$.
La suite est strictement croissante car $r>0$.

b) Suites géométriques

On passe d'un terme au terme suivant en multipliant toujours par le même nombre q appelé raison de la suite.
• Pour tout n : $U_{n+1}=q\times U_n$; $U_n=q^n\times U_0$; $U_n=q^{n-p}\times U_p$
• Si pour tout n, $U_n\neq0$ et $\frac{U_{n+1}}{U_n}=$ constante alors (U_n) est une suite géométrique de raison égale à la constante.

• $U_p+U_{p+1}+\cdots+U_n = U_p \times \dfrac{1-q^{n-p+1}}{1-q} = 1\text{er terme} \times \dfrac{1-q^{\text{nb de termes}}}{1-q}$ (pour $q \neq 1$)
• Si le premier terme est positif et si $q > 1$ alors la suite géométrique de raison q est croissante.
• Si le premier terme est positif et si $0 < q < 1$ alors la suite géométrique de raison q est décroissante.

► *Exemple :*
Soit (U_n) la suite géométrique de 1er terme $U_0 = 5$ et de raison $q = 2$.
$U_4 = q^4 \times U_0 = 2^4 \times 5 = 80$; $U_{10} = q^{10} \times U_0 = 2^{10} \times 5 = 5120$
Pour tout n, $U_n = q^n \times U_0 = 5 \times 2^n$. $U_0 + U_1 + \cdots + U_8 = 5 \times \dfrac{1-2^9}{1-2} = 2555$.
La suite (U_n) est croissante car $U_0 > 0$ et $q > 1$.

c) Suites arithmético-géométriques : $U_{n+1} = aU_n + b$

► *Exemple :* Soit (U_n), la suite définie par $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = 0{,}6\,U_n + 2$.
a) Montrer que la suite (V_n) définie par $V_n = U_n - 5$ est géométrique.
Méthode générale :
• on calcule $\dfrac{V_{n+1}}{V_n}$ en exprimant V_n et V_{n+1} en fonction de U_n et de U_{n+1} :
$\dfrac{V_{n+1}}{V_n} = \dfrac{U_{n+1}-5}{U_n-5}$
• on remplace alors U_{n+1} par ce qu'indique la définition de la suite (U_n) :
$\dfrac{V_{n+1}}{V_n} = \dfrac{U_{n+1}-5}{U_n-5} = \dfrac{0{,}6\,U_n+2-5}{U_n-5}$
• on simplifie le numérateur et on le factorise par le coefficient devant U_n :
$\dfrac{V_{n+1}}{V_n} = \dfrac{U_{n+1}-5}{U_n-5} = \dfrac{0{,}6\,U_n+2-5}{U_n-5} = \dfrac{0{,}6\,U_n-3}{U_n-5} = \dfrac{0{,}6\left(U_n - \frac{3}{0{,}6}\right)}{U_n-5}$
$= \dfrac{0{,}6\,(U_n-5)}{U_n-5} = 0{,}6$
Pour tout n, on a $\dfrac{V_{n+1}}{V_n} = 0{,}6$. Cela prouve bien que (V_n) est une suite géométrique de raison $q = 0{,}6$ et de premier terme $V_0 = U_0 - 5 = 2 - 5 = -3$.

b) En déduire l'expression de V_n, puis de U_n en fonction de n.
Pour tout n, $V_n = q^n \times V_0 = -3\,(0{,}6)^n$.
$V_n = U_n - 5 \Leftrightarrow U_n = V_n + 5 = -3\,(0{,}6)^n + 5$

c) Étudier le sens de variation de la suite (U_n).
Méthode générale : on étudie pour cela le signe de $U_{n+1} - U_n$.
• si cette différence est toujours positive, on en déduit que la suite est croissante.
• si cette différence est toujours négative, on en déduit que la suite est décroissante.

Ici, on a pour tout n, $U_{n+1} - U_n = -3\,(0{,}6)^{n+1} + 5 - \left[-3\,(0{,}6)^n + 5\right] = -3\,(0{,}6)^{n+1} + 3\,(0{,}6)^n$
$= 3\,(0{,}6)^n \times [-0{,}6 + 1] = 3\,(0{,}6)^n \times 0{,}4 = 1{,}2\,(0{,}6)^n$.
Le résultat étant positif pour tout n, on en déduit que (U_n) est croissante.

d) Calculer $V_0 + V_1 + \cdots + V_9$ et en déduire $U_0 + U_1 + \cdots + U_9$.
(V_n) est géométrique.
Donc, $V_0 + V_1 + \cdots + V_9 = V_0 \times \dfrac{1-(0{,}6)^{10}}{1-0{,}6} = -3 \times \dfrac{1-(0{,}6)^{10}}{0{,}4} \approx -7{,}45$.
Pour tout n, $U_n = V_n + 5$. Donc, $U_0 + U_1 + \cdots + U_9 = V_0 + 5 + V_1 + 5 + \cdots + V_9 + 5$
$= V_0 + V_1 + \cdots + V_9 + 50 \approx 42{,}55$.

e) Déterminer l'expression de $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$ en fonction de n.
$S_n = V_0 + 5 + V_1 + 5 + \cdots + V_n + 5 = V_0 + V_1 + \cdots + V_n + 5(n+1)$.
Or (V_n) est géométrique.
Donc, $V_0 + V_1 + \cdots + V_n = V_0 \times \dfrac{1-(0{,}6)^{n+1}}{1-0{,}6} = -3 \times \dfrac{1-(0{,}6)^{n+1}}{0{,}4}$
$= -7{,}5 \times \left(1-(0{,}6)^{n+1}\right)$.
D'où, $S_n = -7{,}5 \times \left(1-(0{,}6)^{n+1}\right) + 5(n+1)$.

9. Exponentielle

a) Existence - Valeurs particulières

e^x existe pour tout réel x ; $e^0 = 1$; $e^1 = e$; $e^{-1} = \dfrac{1}{e}$

b) Propriétés algébriques

Pour tous réels a et b et pour tout entier n :
$e^a \times e^b = e^{a+b}$; $\dfrac{1}{e^a} = e^{-a}$; $\dfrac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$; $(e^a)^n = e^{na}$

► *Exemple :* Pour tout x, $\left(e^{-x}\right)^2 \times e^{3x} = e^{-2x} \times e^{3x} = e^x$

c) Signe de e^x

Pour tout réel x, e^x est strictement positif.

d) Dérivées

$(e^x)' = e^x$; $(e^{-x})' = -e^x$; $(e^{ax})' = a\,e^{ax}$

▶ *Exemples :*
- $\left[e^{-0,5x}\right]' = -0{,}5\,e^{-0,5x}$
- $\left[3x\,e^{2x}\right]' = 3 \times e^{2x} + 3x \times \left(2e^{2x}\right) = 3\,e^{2x} + 6x\,e^{2x} = (3+6x)\,e^{2x}$

e) Équations et inéquations

- $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$; • $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$; • $e^a \leqslant e^b \Leftrightarrow a \leqslant b$

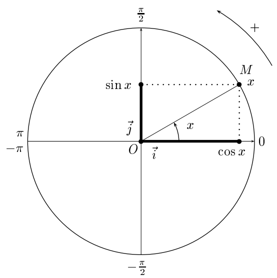
▶ *Exemples :*

$e^{3x} = e^6 \Leftrightarrow 3x = 6 \Leftrightarrow x = 2$

$e^{2x-6} = 1 \Leftrightarrow e^{2x-6} = e^0 \Leftrightarrow 2x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3$

10. Trigonométrie

Le plan orienté étant muni d'un repère orthonormé direct $\left(0,\vec{i},\vec{j}\right)$ .Pour tout réel x, il existe un unique point M sur le cercle trigonométrique de centre O tel que $\left(\vec{i},\overrightarrow{OM}\right) = x + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. On a alors :
- $\cos x$ qui est égal à **l'abscisse de** M ;
- $\sin x$ qui est égal à **l'ordonnée de** M.



Propriétés

Pour tout réel x et pour tout entier k :
- $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$; • $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$; • $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$
- $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$; • $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$

11. Géométrie analytique - Produit scalaire

Le plan étant muni d'un repère orthonormé

a) Généralités

- Le **déterminant** des vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ est le réel noté $\det(\vec{u},\vec{v})$ défini par : $\det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = x \times y' - y \times x'$
- Dire que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires équivaut à dire que $\det(\vec{u},\vec{v}) = 0$.
- Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ alors sa norme (c'est à dire sa longueur) est $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- si $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

« coordonnées du 2e point - coordonnées du 1er point »
- si $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ alors le milieu de $[AB]$ est $I\begin{pmatrix} \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{pmatrix}$
- si $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ alors la distance AB est telle que $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
- Dire que trois points A, B et C sont alignés équivaut à dire que $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = 0$.
- Dire que les droites (AB) et (CD) sont parallèles équivaut à dire que $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}) = 0$.

b) Produit scalaire de 2 vecteurs et coordonnées

- si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$.
- Dire que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux équivaut à dire que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- le carré scalaire de $\vec{u}$ est le nombre réel noté $\vec{u}^2$ défini par $\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$.

• Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors $\vec{u}^2 = x^2 + y^2$ et $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$ (le carré scalaire d'un vecteur est aussi égal au carré de sa longueur).
• $(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2$ • $(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2$
• $(\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

c) Équations cartésiennes de droites

• Toute droite d admet une équation (dite cartésienne) de la forme $ax + by + c = 0$ (a et b ne pouvant pas être nuls en même temps). Un **vecteur directeur** de d est alors $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ et un **vecteur normal** est $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.
• Pour déterminer une équation cartésienne d'une droite connaissant deux de ses points A et B ($A \neq B$), on exprime que dire qu'un point $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est sur la droite équivaut à dire que $\det(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}) = 0$.
• Pour déterminer si la droite d d'équation $ax + by + c = 0$ est parallèle à la droite d' d'équation $a'x + b'y + c' = 0$, on détermine si les vecteurs directeurs $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ et $\vec{u}'\begin{pmatrix} -b' \\ a' \end{pmatrix}$ des deux droites sont colinéaires en vérifiant si leur déterminant est nul.
• Pour déterminer si la droite d d'équation $ax + by + c = 0$ est perpendiculaire à la droite d' d'équation $a'x + b'y + c' = 0$, on détermine si les vecteurs directeurs $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ et $\vec{u}'\begin{pmatrix} -b' \\ a' \end{pmatrix}$ des deux droites sont orthogonaux en vérifiant si leur produit scalaire est nul.

d) Équations cartésiennes de cercles

• Pour un cercle dont on connaît le centre et le rayon : le cercle de centre $\Omega\begin{pmatrix} x_\Omega \\ y_\Omega \end{pmatrix}$ et de rayon $r > 0$ admet pour équation cartésienne $(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = r^2$.
• Pour un cercle dont on connaît deux points formant un diamètre : dire qu'un point M est sur le cercle de diamètre $[AB]$ équivaut à dire que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0$

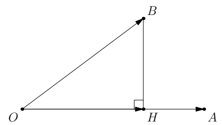
e) Produit scalaire et vecteurs colinéaires

• Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls, **colinéaires et de même sens** alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ (« produit des longueurs »).
• Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls, **colinéaires et de sens contraire** alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ (« - produit des longueurs »).

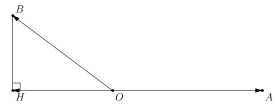
f) Produit scalaire et projection orthogonale

H étant le projeté orthogonal de B sur (OA) :

• Si $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OH}$ sont de **même sens** alors $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OH} = OA \times OH$

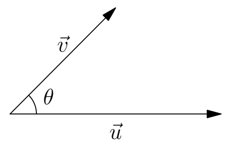


• Si $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OH}$ sont de **sens contraire** alors $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OH} = -OA \times OH$



g) Produit scalaire, distances et angles

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls et si θ est une mesure de l'angle géométrique entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ alors on a $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\theta$



► *Exemples :*
• Si $\|\vec{u}\| = 1$, $\|\vec{v}\| = 2$, $\theta = \frac{\pi}{6}$ alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = 1 \times 2 \times \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$
• Si $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ alors $\cos\theta = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}$

$$= \frac{1 \times 3 + \sqrt{3} \times \sqrt{3}}{\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} \times \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2}} = \frac{6}{2 \times 2\sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Théorème d'Al-Kashi

Dans un triangle ABC et avec les notations de la figure ci-contre, on a $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$.