

©Pascal Brachet (CC BY NC SA)

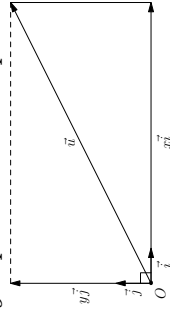
<https://www.xmlmath.net>

1. Rappels

a) Coordonnées d'un vecteur et d'un point dans un repère

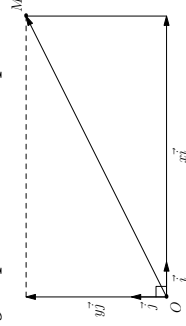
Dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) :

- Dire qu'un vecteur \vec{u} a pour abscisse x et ordonnée y équivaut à dire que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.



Notation : $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (ou $\vec{u}(x, y)$).

- Dire qu'un point M a pour abscisse x et ordonnée y équivaut à dire que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.



Notation : $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (ou $M(x, y)$).

b) Déterminant de deux vecteurs

Dans une base (\vec{i}, \vec{j}) , on appelle **déterminant** des vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ le réel noté $\det(\vec{u}, \vec{v})$

défini par : $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = x \times y' - y \times x'$

Exemple(s)

Si $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ alors $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \times 4 - 1 \times 3 = 5$

c) Propriétés à connaître

Dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) :

- Dire que deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires équivaut à dire que $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.
- Si $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ alors sa norme (c'est à dire sa longueur) est $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- si $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ alors $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$
« coordonnées du 2^e point - coordonnées du 1^{er} point »
- si $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ alors le milieu de $[AB]$ est $I \begin{pmatrix} \frac{x_A + x_B}{2} \\ \frac{y_A + y_B}{2} \end{pmatrix}$
- si $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ alors la distance AB est telle que $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
- Dire que trois points A , B et C sont alignés équivaut à dire que $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$.
- Dire que les droites (AB) et (CD) sont parallèles équivaut à dire que $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 0$.

1. Rappels

Exemple(s)

- a) Dans le repère ci-contre, placer les points $A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ et

$$C \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

- b) Déterminer les coordonnées des vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} .

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \leftarrow 5 - 2 \quad ; \quad \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \leftarrow 1 - 2$$

- c) Calculer la distance BC .

$$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(1 - 5)^2 + (4 - 2)^2} = \sqrt{(-4)^2 + 2^2} = \sqrt{20}$$

- d) Déterminer les coordonnées du point D tel que $ABDC$ soit un parallélogramme.

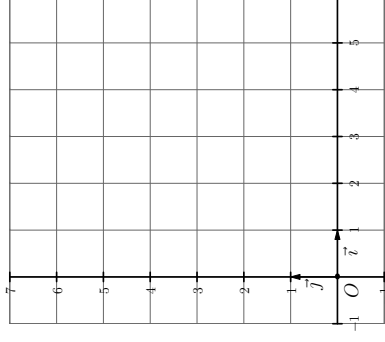
$$ABDC \text{ parallélogramme} \Leftrightarrow \overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} x_D - 1 \\ y_D - 4 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_D - 1 = 3 \\ y_D - 4 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 4 \\ y_D = 5 \end{cases}$$

- e) Déterminer les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{CM} \begin{pmatrix} x_M - 1 \\ y_M - 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3/4 \\ 1/4 \end{pmatrix} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -3/4 \\ 9/4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_M - 1 = 0 \\ y_M - 4 = 5/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = 1 \\ y_M = 13/2 \end{cases}$$



1. Rappels

Exemple(s)

f) Vérifier que les droites (DM) et (BC) sont parallèles.

$$\text{On a } \overrightarrow{DM} \begin{pmatrix} -3 \\ 3/2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow 1-4 \\ \leftarrow 13/2-5 \end{matrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow 1-5 \\ \leftarrow 4-2 \end{matrix}$$

$$\text{Donc, } \det(\overrightarrow{DM}, \overrightarrow{BC}) = \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 3/2 & 2 \end{vmatrix} = -3 \times 2 - \frac{3}{2} \times (-4) = 0.$$

g) Déterminer les coordonnées de I le milieu de $[CD]$:

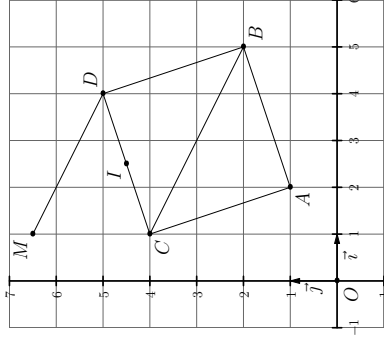
$$I \begin{pmatrix} \frac{x_C+x_D}{2} \\ \frac{y_C+y_D}{2} \end{pmatrix} \Leftrightarrow I \begin{pmatrix} \frac{1+4}{2} \\ \frac{4+5}{2} \end{pmatrix}. \text{ On a donc, } I \begin{pmatrix} 5/2 \\ 9/2 \end{pmatrix}$$

h) Vérifier si les points B , I et M sont alignés ou non .

$$\text{On a } \overrightarrow{BI} \begin{pmatrix} -5/2 \\ 5/2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow 5/2-5 \\ \leftarrow 9/2-2 \end{matrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BM} \begin{pmatrix} -4 \\ 9/2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow 1-5 \\ \leftarrow 13/2-2 \end{matrix}$$

$$\det(\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BM}) = \begin{vmatrix} -5/2 & -4 \\ 5/2 & 9/2 \end{vmatrix} = -\frac{5}{2} \times \frac{9}{2} - \frac{5}{2} \times (-4) = -\frac{5}{4} \neq 0.$$

B , I et M ne sont pas alignés.



1. Rappels

d) Équations cartésiennes de droites

- Toute droite d admet une équation (dite cartésienne) de la forme $ax + by + c = 0$ (a et b ne pouvant pas être nuls en même temps). Un vecteur directeur de d est alors $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.
- Les droites verticales admettent une équation de la forme « $x =$ une constante » ;
- Les droites horizontales admettent une équation de la forme « $y =$ une constante ».
- Pour déterminer une équation cartésienne d'une droite connaissant deux de ses points A et B ($A \neq B$), on exprime que dire qu'un point $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est sur la droite équivaut à dire que $\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0$.
- Pour déterminer si la droite d d'équation $ax + by + c = 0$ est parallèle à la droite d' d'équation $a'x + b'y + c' = 0$, on détermine si les vecteurs directeurs $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ et $\vec{u}' \begin{pmatrix} -b' \\ a' \end{pmatrix}$ des deux droites sont colinéaires en vérifiant si leur déterminant est nul.
- Pour déterminer une équation de la droite d' parallèle à la droite d d'équation $ax + by + c = 0$ et passant par un point A , on détermine un vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ de d (qui est donc aussi un vecteur directeur de d') et on exprime que dire qu'un point $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est sur d' équivaut à dire que $\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0$.

1. Rappels

Exemple(s)

On considère les points $A \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$, $B \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $C \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ et la droite d d'équation $3x - 4y + 12 = 0$.

a) Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB) :

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in d \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-2 & -5 \\ y-7 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow -3(x-2) - (-5)(y-7) = 0 \Leftrightarrow -3x + 5y - 29 = 0. \text{ Une équation de } d \text{ est } 3x + 5y - 29 = 0.$$

b) Tracer la droite d :

Si $x = 0$, on doit avoir $-4y + 12 = 0$, c'est à dire $y = 3$
 Si $y = 0$, on doit avoir $3x + 12 = 0$, c'est à dire $x = -4$

c) Donner un vecteur directeur de d :

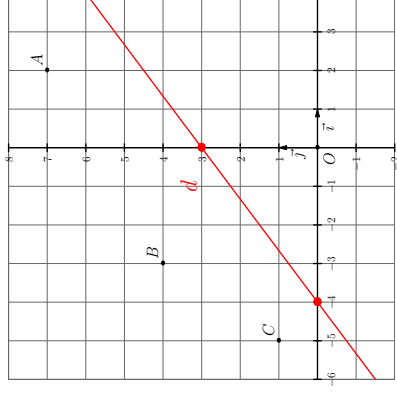
$$\text{Un vecteur directeur est } \vec{u} \begin{pmatrix} -(-4) \\ 3 \end{pmatrix} = \vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

d) Déterminer une équation de la droite d' parallèle à la droite d et passant par C :

$\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ est aussi un vecteur directeur de d' .

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in d' \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{CM}, \vec{u}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+5 & 4 \\ y-1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$\Leftrightarrow 3(x+5) - 4(y-1) = 0 \Leftrightarrow 3x - 4y + 19 = 0$. Une équation de d' est $3x - 4y + 19 = 0$



1. Rappels

e) Résolution des systèmes linéaires 2x2 possédant une unique solution

Principe

- Pour trouver x , on cherche à éliminer y . Cela se fait en multipliant les deux équations par des coefficients judicieusement choisis de telle façon qu'en ajoutant ces deux nouvelles équations les termes en y s'éliminent. Ce style d'opération s'appelle une **combinaison linéaire**.
- Pour trouver y , on élimine de la même façon x avec une autre combinaison linéaire.

Exemple(s)

a) Résolution du système
$$\begin{cases} L_1 & x + 4y = 2 \\ L_2 & 3x - 2y = -8 \end{cases}$$

La combinaison linéaire $L_1 + 2L_2$ permet d'éliminer y et la combinaison linéaire $3L_1 - L_2$ permet d'éliminer x . D'où la résolution :

$$\begin{cases} L_1 & x + 4y = 2 \\ L_2 & 3x - 2y = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} L_1 + 2L_2 & 7x = -14 \\ 3L_1 - L_2 & 14y = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases} \cdot S = \{(-2; 1)\}$$

b) Résolution du système
$$\begin{cases} L_1 & 2x + 5y = 21 \\ L_2 & 6x + 2y = -2 \end{cases}$$

La combinaison linéaire $2L_1 - 5L_2$ permet d'éliminer y et la combinaison linéaire $3L_1 - L_2$ permet d'éliminer x . D'où la résolution :

$$\begin{cases} L_1 & 2x + 5y = 21 \\ L_2 & 6x + 2y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2L_1 - 5L_2 & -26x = 52 \\ 3L_1 - L_2 & 13y = 65 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 5 \end{cases} \cdot S = \{(-2; 5)\}$$

2. Produit scalaire de 2 vecteurs dans un repère orthonormé

a) Première définition

Définition

Dans un repère orthonormé, on appelle **produit scalaire** des vecteurs \vec{u} et \vec{v} le réel, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ défini par $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$

b) Condition d'orthogonalité de 2 vecteurs dans un repère orthonormé

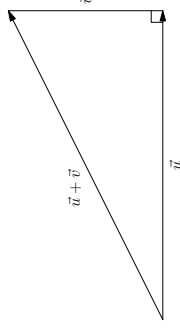
Propriété(s)

Dans un repère orthonormé, dire que deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux équivaut à dire que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Démonstration :

• Si aucun des deux vecteurs est nul : dire que \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux équivaut à dire que $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$ d'après la relation de Pythagore. Ce qui revient à dire que $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = 0$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

• Si l'un des vecteurs est nul, il est considéré comme orthogonal à tous les vecteurs et on a bien $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{0}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{0}\|^2) = 0$ ou $\frac{1}{2} (\|\vec{0} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{0}\|^2 - \|\vec{v}\|^2) = 0$



2. Produit scalaire de 2 vecteurs dans un repère orthonormé

c) Expression analytique du produit scalaire

Propriété(s)

Dans un repère orthonormé, si $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$.

Démonstration :

$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$; $\|\vec{v}\| = \sqrt{x'^2 + y'^2}$; $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \sqrt{(x+x')^2 + (y+y')^2}$, donc :
 $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} [(x+x')^2 + (y+y')^2 - (x^2 + y^2) - (x'^2 + y'^2)] = \frac{1}{2} [2xx' + 2yy'] = xx' + yy'$

Exemple(s)

- a) Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et déterminer si $\vec{u} \perp \vec{v}$:
 $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times 2 + (-1) \times 4 = 2 \neq 0$. \vec{u} et \vec{v} ne sont pas orthogonaux.
- b) Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} \\ 3 \end{pmatrix}$. Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et déterminer si $\vec{u} \perp \vec{v}$:
 $\vec{u} \cdot \vec{v} = \sqrt{2} \times 3\sqrt{2} + (-2) \times 3 = 6 - 6 = 0$. \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux.
- c) Soit $A \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $C \begin{pmatrix} 5/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$. Déterminer si le triangle ABC est rectangle en A :
 $\vec{AB} \begin{pmatrix} 3/2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ -3/2 \end{pmatrix} = \frac{3}{2} \times 2 + 2 \times (-\frac{3}{2}) = 0$. Le triangle ABC est rectangle en A .

2. Produit scalaire de 2 vecteurs dans un repère orthonormé

d) Règles de calcul

Propriété(s)

Pour tous vecteurs \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} et pour tout réel k :

$$(1) \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

$$(2) \quad \vec{u} \cdot \vec{0} = \vec{0} \cdot \vec{u} = 0$$

$$(3) \quad (k\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$$

$$(4) \quad \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

Démonstration : avec $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$

$$(1) \quad \text{car } xx' + yy' = yy' + xx'$$

$$(2) \quad \text{car } 0 \times x + 0 \times y = 0$$

$$(3) \quad (k\vec{u}) \cdot \vec{v} = (kx) \times x' + (ky) \times y' = kxx' + kyy' ; \vec{u} \cdot (k\vec{v}) = x(kx') + y(ky') = kxx' + kyy'$$

$$(4) \quad \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = x(x' + x'') + y(y' + y'') = xx' + yy' + xx'' + yy'' = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

Exemple(s)

Sachant que deux vecteurs \vec{u} et v sont tels que $\vec{u} \cdot \vec{u} = 5$; $\vec{u} \cdot \vec{v} = -7$; $\vec{v} \cdot \vec{v} = 13$, calculer $(3\vec{u}) \cdot \vec{v}$ et $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (3\vec{u} + \vec{v})$.

$$(3\vec{u}) \cdot \vec{v} = 3(\vec{u} \cdot \vec{v}) = 3 \times (-7) = -21.$$

$$(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (3\vec{u} + \vec{v}) = 3(\vec{u} \cdot \vec{u}) + \vec{u} \cdot \vec{v} - 3(\vec{u} \cdot \vec{v}) - \vec{v} \cdot \vec{v} = 3 \times 5 + (-7) - 3(-7) - 13 = 16$$

2. Produit scalaire de 2 vecteurs dans un repère orthonormé

e) Carré scalaire d'un vecteur

Définition

On appelle **carré scalaire** d'un vecteur \vec{u} , le nombre réel noté \vec{u}^2 défini par $\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$.

Propriété(s)

Pour tout vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, on a $\vec{u}^2 = x^2 + y^2$ et $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$ (le carré scalaire d'un vecteur est aussi égal au carré de sa longueur).

Démonstration : car $\vec{u} \cdot \vec{u} = x \times x + y \times y = x^2 + y^2$ et $\|\vec{u}\|^2 = (\sqrt{x^2 + y^2})^2 = x^2 + y^2$

Conséquence : pour tous points A et B, le carré scalaire \overrightarrow{AB}^2 est aussi égal au carré de la distance AB.

Propriété(s)

Pour tous vecteurs \vec{u} et \vec{v} :

$$\bullet \quad (\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$$

$$\bullet \quad (\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$$

$$\bullet \quad (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$$

(« identités remarquables » pour le carré scalaire)

Démonstration : se démontre en développant

2. Produit scalaire de 2 vecteurs dans un repère orthonormé

Exemple(s)

Soit ABC un triangle tel que $AC = 7$, $AB = 9$ et $CB = 4$.

- a) En utilisant la distance CB , donner la valeur du carré scalaire \overrightarrow{CB}^2 .
Le carré scalaire \overrightarrow{CB}^2 est aussi égal au carré de la distance CB . On a donc $\overrightarrow{CB}^2 = 4^2 = 16$.

- b) Développer et exprimer en fonction de $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ le carré scalaire $(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})^2$.

$$(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})^2 = \overrightarrow{AB}^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2.$$

Or le carré scalaire \overrightarrow{AB}^2 est aussi égal au carré de la distance AB , c'est à dire à 9^2 et le carré scalaire \overrightarrow{AC}^2 est aussi égal au carré de la distance AC , c'est à dire à 7^2 .

$$\text{On a donc, } (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})^2 = 81 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + 49 = 130 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}.$$

- c) Dédurre des deux questions précédentes la valeur de $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

$$(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})^2 \text{ est aussi égal à } (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB})^2 = \overrightarrow{CB}^2.$$

$$\text{On a donc } 130 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 16 \Leftrightarrow -2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -114.$$

$$\text{On en déduit que } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 57.$$

3. Produit scalaire et équations cartésiennes de droites

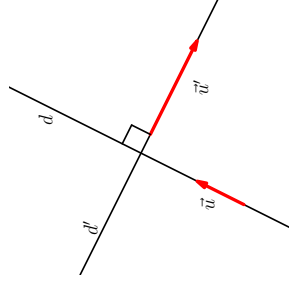
- a) Comment déterminer si la droite d d'équation $ax + by + c = 0$ est perpendiculaire à la droite d' d'équation $a'x + b'y + c' = 0$?

Méthode

On détermine si les vecteurs directeurs $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ et

$\vec{u}' \begin{pmatrix} -b' \\ a' \end{pmatrix}$ des deux droites sont orthogonaux en vérifiant

si leur produit scalaire est nul.



Exemple(s)

La droite d d'équation $-8x + 2y - 1 = 0$ est-elle perpendiculaire à la droite d' d'équation $3x + 12y + 5 = 0$?

Un vecteur directeur de d est $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \end{pmatrix}$ et un vecteur directeur de d' est $\vec{u}' \begin{pmatrix} -12 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$$\vec{u} \cdot \vec{u}' = -2 \times (-12) + (-8) \times 3 = 0.$$

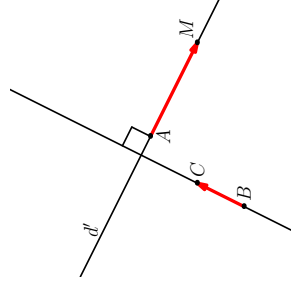
\vec{u} et \vec{u}' étant orthogonaux, on peut en conclure que les droites d et d' sont perpendiculaires.

3. Produit scalaire et équations cartésiennes de droites

b) Comment déterminer une équation de la droite d' passant par le point A et perpendiculaire à la droite (BC) ?

Méthode

On exprime que dire qu'un point $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est sur d' équivaut à dire que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.



Exemple(s)

Détermination d'une équation cartésienne de la droite d' passant par le point $A \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix}$ et

perpendiculaire à la droite (BC) avec $B \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $C \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$:

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in d' \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x+7 \\ y-3 \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 3(x+7) - 1 \times (y-3) = 0 \Leftrightarrow 3x - y + 24 = 0.$$

Une équation de d' est $3x - y + 24 = 0$

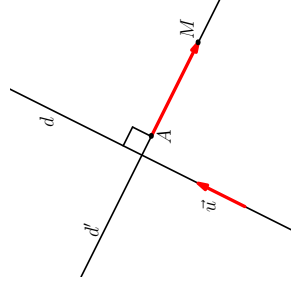
xmlmath.net

3. Produit scalaire et équations cartésiennes de droites

c) Comment déterminer une équation de la droite d' passant par A et perpendiculaire à la droite d d'équation $ax + by + c = 0$?

Méthode

On exprime que dire qu'un point $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est sur d' équivaut à dire que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = 0$.



Exemple(s)

Détermination d'une équation de la d' passant par $A \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et perpendiculaire à la droite d d'équation $11x - 3y + 7 = 0$:

Un vecteur directeur de d est $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \end{pmatrix}$.

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in d' \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x+3 \\ y-4 \end{pmatrix} \cdot \vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 3(x+3) + 11(y-4) = 0 \Leftrightarrow 3x + 11y - 35 = 0.$$

Une équation de d' est $3x + 11y - 35 = 0$

xmlmath.net

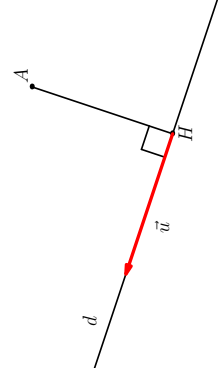
3. Produit scalaire et équations cartésiennes de droites

d) Détermination des coordonnées du projeté orthogonal H d'un point A sur la droite d d'équation $ax + by + c = 0$

Méthode

On exprime, dans un système, que les coordonnées de H doivent vérifier l'équation de d et que l'on doit avoir

$$\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} \left(\begin{array}{c} -b \\ a \end{array} \right) = 0.$$



Exemple(s)

Détermination des coordonnées du projeté orthogonal H du point $A \left(\begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array} \right)$ sur la droite d d'équation

$$x + 3y + 5 = 0 :$$

$$\text{On doit avoir } \begin{cases} x_H + 3y_H + 5 = 0 \\ \overrightarrow{AH} \left(\begin{array}{c} x_H - 2 \\ y_H - 1 \end{array} \right) \cdot \vec{u} \left(\begin{array}{c} -3 \\ 1 \end{array} \right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H + 3y_H + 5 = 0 \\ -3(x_H - 2) + (y_H - 1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} x_H + 3y_H = -5 \\ -3x_H + y_H = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 - 3L_2 \\ 3L_1 + L_2 \end{matrix} \begin{cases} 10x_H = 10 \\ 10y_H = -20 \end{cases} . \text{ On a donc } H \left(\begin{array}{c} 1 \\ -2 \end{array} \right)$$

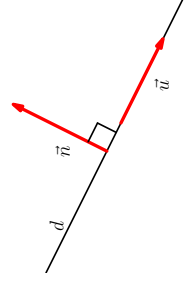
xmlmath.net

3. Produit scalaire et équations cartésiennes de droites

e) Vecteur normal d'une droite

Définition

On appelle **vecteur normal** d'une droite d tout vecteur non nul \vec{n} orthogonal à un vecteur directeur de d .



Propriété(s)

Un vecteur normal de la droite d d'équation $ax + by + c = 0$ est $\vec{n} \left(\begin{array}{c} a \\ b \end{array} \right)$.

Démonstration : car $\vec{n} \left(\begin{array}{c} a \\ b \end{array} \right) \cdot \vec{u} \left(\begin{array}{c} -b \\ a \end{array} \right) = -ab + ba = 0$

Propriété(s)

Si une droite d admet $\vec{n} \left(\begin{array}{c} a \\ b \end{array} \right)$ comme vecteur normal alors elle admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$.

Démonstration : A étant un point de d , $M \left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right) \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \left(\begin{array}{c} x - x_A \\ y - y_A \end{array} \right) \cdot \vec{n} \left(\begin{array}{c} a \\ b \end{array} \right) = 0$
 $\Leftrightarrow a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0 \Leftrightarrow ax + by + (-ax_A - by_A) = 0$

xmlmath.net

4. Équations cartésiennes de cercles

a) Cercle dont on connaît le centre et le rayon

Propriété(s)

Dans un repère orthonormé, le cercle de centre $\Omega \begin{pmatrix} x_\Omega \\ y_\Omega \end{pmatrix}$ et de rayon $r > 0$ admet pour équation cartésienne $(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = r^2$

Démonstration : car dire qu'un point $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est sur le cercle équivaut à dire que $\Omega M^2 = r^2$

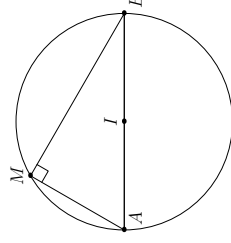
Exemple(s)

Une équation du cercle de centre $\Omega \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ et de rayon $r = \sqrt{3}$ est $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 3$.

b) Cercle dont on connaît 2 points A et B formant un diamètre

Propriété(s)

Dire qu'un point M est sur le cercle de diamètre $[AB]$ équivaut à dire que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$



4. Équations cartésiennes de cercles

Démonstration : Soit I le milieu de $[AB]$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 &\Leftrightarrow (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MI}^2 - \overrightarrow{IA}^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow MI^2 = IA^2 \Leftrightarrow IM^2 = \text{rayon}^2 \Leftrightarrow IM = \text{rayon} \Leftrightarrow M \text{ est sur le cercle de diamètre } [AB]. \end{aligned}$$

Conséquence

Pour déterminer une équation cartésienne d'un cercle connaissant 2 points A et B formant un diamètre, il suffit d'exprimer qu'un point $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est sur le cercle équivaut à dire que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ (sans avoir à calculer les coordonnées du centre et le rayon).

Exemple(s)

Détermination d'une équation du cercle \mathcal{C} de diamètre $[AB]$ avec $A \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned} M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{C} &\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \begin{pmatrix} 1-x \\ -2-y \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{MB} \begin{pmatrix} 3-x \\ 4-y \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-x)(3-x) + (-2-y)(4-y) = 0 \\ &\Leftrightarrow 3-x-3x+x^2-8+2y-4y+y^2 = 0 \Leftrightarrow x^2+y^2-4x-2y-5=0. \end{aligned}$$

Une équation de \mathcal{C} est $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 5 = 0$.

4. Équations cartésiennes de cercles

c) Forme générale des équations cartésiennes de cercles

Propriété(s)

On admet que, pour tous réels a , b et c , l'ensemble des points $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans un repère orthonormé tels que $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ est un cercle, un point ou l'ensemble vide.

Exemple(s)

Montrer que l'ensemble des points $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que $x^2 + y^2 + 6x - 10y - 2 = 0$ est un cercle dont on donnera le centre Ω et le rayon r :

- On cherche d'abord à écrire $x^2 + 6x$ sous la forme $(x + \dots)^2 - \dots$:
Pour cela on utilise que le double produit du développement de $(x + \dots)^2$ doit donner $6x$. On en déduit qu'il nous faut $x + 3$ dans la parenthèse. Il faut dès lors enlever 3^2 à $(x + 3)^2$ pour retomber sur $x^2 + 6x$. On va pouvoir ainsi remplacer $x^2 + 6x$ par $(x + 3)^2 - 9$.
- On cherche ensuite à écrire $y^2 - 10y$ sous la forme $(y - \dots)^2 - \dots$:
Pour cela on utilise que le double produit du développement de $(y - \dots)^2$ doit donner $-10y$. On en déduit qu'il nous faut $y - 5$ dans la parenthèse. Il faut dès lors enlever 5^2 à $(y - 5)^2$ pour retomber sur $y^2 - 10y$. On va pouvoir ainsi remplacer $y^2 - 10y$ par $(y - 5)^2 - 25$.
- L'équation donnée du cercle devient $(x + 3)^2 - 9 + (y - 5)^2 - 25 - 2 = 0 \Leftrightarrow (x - (-3))^2 + (y - 5)^2 = 6^2$.
Ce qui est de la forme $(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = r^2$. On en déduit que l'ensemble cherché est le cercle de centre $\Omega \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ et de rayon $r = 6$.

Fin du chapitre