Correction Entraînement en autonomie n°6 - Spé Maths 1^{re}

► Exercice n°1

1. a) Pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{(2x+2)\times(x+2) - (x^2+2x+36)\times 1}{(x+2)^2} = \dfrac{2x^2+4x+2x+4-x^2-2x-36}{(x+2)^2}$
$= \dfrac{x^2+4x-32}{(x+2)^2}$.

   b) Signe de $x^2+4x-32$: $\Delta = 4^2 - 4\times 1\times(-32) = 144$; signe de $a = 1$ à l'extérieur des racines.
   $x_1 = \dfrac{-4+12}{2} = 4$; $x_2 = \dfrac{-4-12}{2} = -8$

x	0		4		$+\infty$
$x^2+4x-32$		$-$	0	$+$	
$(x+2)^2$		$+$	|	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	18	$\searrow$	10	$\nearrow$	

   $f(0) = \dfrac{36}{2} = 18$; $f(4) = \dfrac{60}{6} = 10$

   c) Une équation de la tangente est $y = f(1) + f'(1)(x-1)$.
   Avec $f(1) = \dfrac{39}{13} = 3$ et $f'(1) = -\dfrac{27}{9} = -3$, cela donne $y = -3x + 16$.

   d) Cela revient à chercher s'il existe un x strictement positif tel que $f'(x) = 1$.
   Or $f'(x) = 1 \Leftrightarrow x^2+4x-32 = (x+2)^2$ (avec $x > 0$) $\Leftrightarrow x^2+4x-32 = x^2+4x+4$ (avec $x > 0$) $\Leftrightarrow -32 = 4$.
   Impossible. Aucun point ne convient.

2. a) Cela revient à chercher $x > 0$, tel que $f(x) = 35$:
   $\dfrac{x^2+2x+36}{x+2} = 35 \Leftrightarrow x^2+2x+36 = 35x+70 \Leftrightarrow x^2 - 33x - 34 = 0$.
   $\Delta = 33^2 - 4\times 1\times(-34) = 1225$; $x_1 = \dfrac{33-35}{2} = -1$ (impossible) ; $x_2 = \dfrac{33+35}{2} = 34$.
   Il faut donc produire 34 tonnes de produit pour répondre à la question.

   b) D'après le tableau de variations de f, il faut produire 4 tonnes.