Correction Entraînement en autonomie n°3 - Spé Maths 1re

▶ Exercice n°1

1. a) $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0 et, pour tout réel x, $f(-x) = -(-x)^2 + 6(-x) - 5 = -x^2 - 6x - 5$.
   $f(-x)$ est ni égal à $f(x)$, ni égal à $-f(x)$. f est ni paire, ni impaire.

   b) $f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 6x - 5 = 0$: $\Delta = 6^2 - 4 \times (-1) \times (-5) = 16 > 0$; $x_1 = \dfrac{-6-4}{(-2)} = 5$; $x_2 = \dfrac{-6+4}{(-2)} = 1$.
   C_f coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisse 5 et 1.

   c) Pour tout x, $f(x) - 4 = -x^2 + 6x - 9$: $\Delta = 6^2 - 4 \times (-1) \times (-9) = 0$. Il existe donc un x pour lequel $f(x) = 4$. L'affirmation est donc fausse.

2. a) Cela revient à déterminer s'il existe des $x > 1$ tels que $g(x) = 1$.
   Pour $x > 1$, $g(x) = 1 \Leftrightarrow x + 5 = x - 1 \Leftrightarrow 5 = -1$. Ce qui est impossible. 1 n'admet aucun antécédent par g.

   b) Pour tout $x > 1$,

$$\begin{aligned}
f(x) - g(x) &= (-x^2 + 6x - 5) \times \frac{(x-1)}{(x-1)} - \frac{(x+5)}{(x-1)} \\
&= \frac{-x^3 + x^2 + 6x^2 - 6x - 5x + 5 - x - 5}{(x-1)} \\
&= \frac{-x^3 + 7x^2 - 12x}{(x-1)} \\
&= \frac{x(-x^2 + 7x - 12)}{(x-1)}
\end{aligned}$$

   c) • Signe de $-x^2 + 7x - 12$: $\Delta = 7^2 - 4 \times (-1) \times (-12) = 1 > 0$.
   « Du signe de $a = -1$ à l'extérieur des racines » qui sont $x_1 = \dfrac{-7-1}{(-2)} = 4$ et $x_1 = \dfrac{-7+1}{(-2)} = 3$.
   • Tant qu'à x et $x - 1$, ces deux facteurs sont strictement positifs sur $]1\,;\,+\infty[$.

x	1		3		4		$+\infty$
x	||	$+$	|	$+$	|	$+$	
$-x^2 + 7x - 12$	||	$-$	0	$+$	0	$-$	
$x - 1$	||	$+$	|	$+$	|	$+$	
$f(x) - g(x)$	||	$-$	0	$+$	0	$-$	
Position relative	||	C_f en dessous de C_g	|	C_f au dessus de C_g	|	C_f en dessous de C_g	

▶ Exercice n°2

1. • On observe d'abord que la période minimale T est égale à 3π.
   On en déduit que $\dfrac{2\pi}{\omega} = 3\pi$ et, donc que $\omega = \dfrac{2}{3}$.
   Ainsi $f(x)$ est de la forme $r \sin\left(\dfrac{2}{3}x + \varphi\right)$.
   • Le maximum de la fonction étant 4, on en déduit qu'on a forcément $r = 4$.
   Ainsi $f(x)$ est de la forme $4 \sin\left(\dfrac{2}{3}x + \varphi\right)$.
   • On doit avoir aussi $f(0) = 2$. On en déduit que $4 \sin(\varphi) = 2$ et donc que $\sin(\varphi) = \dfrac{1}{2}$.
   Comme φ doit être dans $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$, la seule possibilité est que $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$.
   • On en conclut que $f(x) = 4 \sin\left(\dfrac{2}{3}x + \dfrac{\pi}{6}\right)$.

2. On a $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 4 \sin\left(\dfrac{2}{3} \times \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{6}\right) = 4 \sin\left(\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{6}\right) = 4 \sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 4 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$.