Lors d'une expérience aléatoire :
- L'univers est l'ensemble des résultats possibles.
- Un événement A est une partie de l'univers.
- Un événement élémentaire est un événement ne comportant qu'un seul élément.
- L'événement contraire de l'événement A est l'événement noté $\overline{A}$ formé de tous les éléments de l'univers n'appartenant pas à A.
- L'événement $A \cap B$ (noté aussi « A et B ») est l'événement formé des éléments de l'univers appartenant à A et à B.
- L'événement $A \cup B$ (noté aussi « A ou B ») est l'événement formé des éléments de l'univers appartenant au moins à l'un des événements A ou B.
- Deux événements A et B sont dits incompatibles si leur intersection est vide.

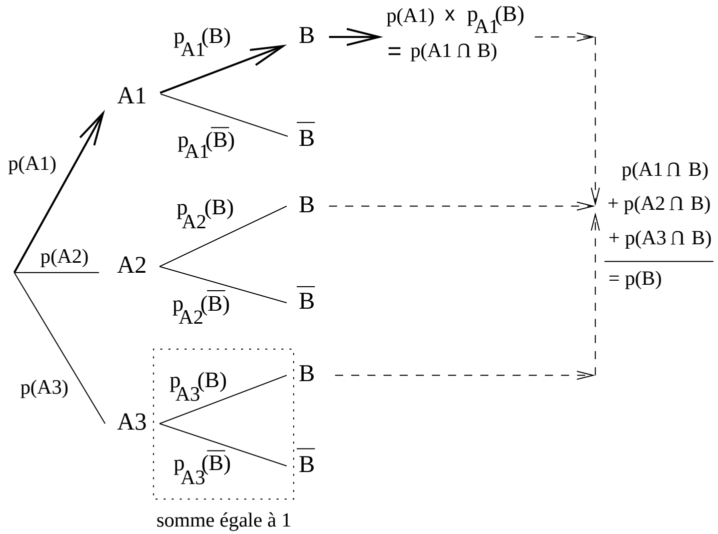
Pour une expérience aléatoire telle que l'univers Ω soit fini et quelque soit la loi de probabilité :
- • $p(\varnothing) = 0$ et $p(\Omega) = 1$
- Pour tout événement A, $\quad 0 \leqslant p(A) \leqslant 1$
- Si un événement A est inclus dans un événement B, $\quad p(A) \leqslant p(B)$
- $p\left(\overline{A}\right) = 1 - p(A)$
- Si A et B sont incompatibles alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$
- Si A et B ne sont pas incompatibles alors
  $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

▶ **Exemple :** On lance un dé. Le joueur gagne 6 euros s'il obtient un « 1 » ou un « 6 » et il perd 2 euros dans le cas contraire. Soit X le gain du joueur.
Loi de probabilité de X : X ne peut prendre que les valeurs -2 et 6.

On a $p(X = -2) =$ et $p(X = 6) =$

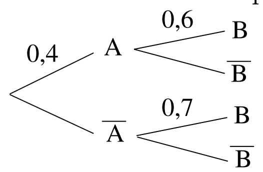
x_i	-2	6
p_i *(la somme doit être égale à 1)*		

$E(X) =$



▶ **Règles de construction et d'utilisation des arbres pondérés :**
- Sur les premières branches, on inscrit les $p(A_i)$.
- Sur les branches du type $A_i \longrightarrow B$, on inscrit $p_{A_i}(B)$.
- Le produit des probabilités inscrites sur chaque branche d'un chemin donne la probabilité de l'intersection des événements placés sur ce chemin.
- La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1 (loi des nœuds).
- La probabilité d'un événement E est la somme des probabilités des chemins qui aboutissent à E.

▶ **Exemple 1 :**
On considère l'arbre pondéré ci-dessous :



1. De quel évènement 0,6 est-il la probabilité ?

2. Compléter les probabilités manquantes sur l'arbre.

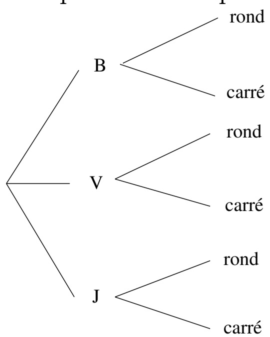
3. Calculer $p(A \cap B)$, $p\left(A \cap \overline{B}\right)$, $p\left(\overline{A} \cap B\right)$ et $p\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)$.

4. Calculer $p(B)$.

5. Calculer $p_B(A)$.

▶ **Exemple 2 :**
Un sac contient des jetons de trois couleurs, la moitié de blancs, le tiers de verts et le sixième de jaunes. 50% des jetons blancs, 30% des jetons verts et 40% des jetons jaunes sont ronds. Tous les autres jetons sont carrés. On tire au hasard un jeton.

1. Compléter l'arbre pondéré ci-dessous :



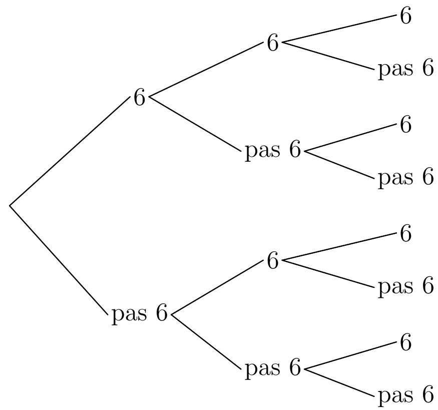
2. Sachant que le jeton tiré est blanc, quelle est la probabilité pour qu'il soit carré ?

3. Quelle est la probabilité pour que le jeton tiré soit rond ?

4. Sachant que le jeton tiré est rond, quelle est la probabilité pour qu'il soit blanc ?

▶ **Exemple :** On lance 3 fois de suite un dé (épreuves indépendantes) et on s'intéresse au fait d'obtenir un « 6 » ou non.

1. Compléter l'arbre pondéré correspondant à la situation :

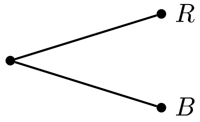


2. Calculer les probabilités suivantes :
   - p(avoir trois fois un « 6 »)
   - p(n'avoir aucun « 6 »)
   - p(avoir exactement deux fois un « 6 »)

On considère l'exemple suivant : Une boîte contient des jetons rouges et bleus et on s'intéresse au fait d'obtenir un certain nombre de jetons rouges lors de divers tirages successifs avec remise (tirages identiques et indépendants).

a) Tirage d'un jeton

La situation peut se schématiser à l'aide de l'arbre ci-dessous :



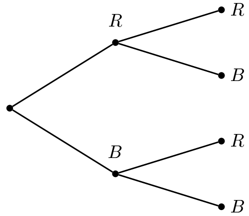
- On note $\binom{1}{0}$ le nombre de chemins dans l'arbre qui permettent d'obtenir 0 jeton rouge lors de ce tirage d'1 jeton. On a donc $\binom{1}{0} = \ldots\ldots$.
- On note $\binom{1}{1}$ le nombre de chemins dans l'arbre qui permettent d'obtenir 1 jeton rouge lors de ce tirage d'1 jeton. On a donc $\binom{1}{1} = \ldots\ldots$.

Compléter alors le tableau suivant :

nombre de chemins donnant :	0 jeton rouge	1 jeton rouge
Pour 1 jeton tiré	$\binom{1}{0} = \ldots\ldots$	$\binom{1}{1} = \ldots\ldots$

b) Tirage de 2 jetons

La situation peut se schématiser à l'aide de l'arbre ci-dessous :



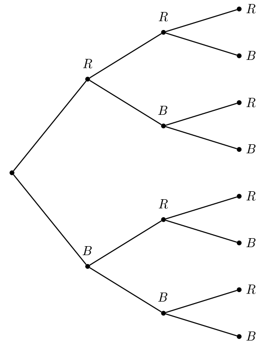
- On note $\binom{2}{0}$ le nombre de chemins dans l'arbre qui permettent d'obtenir 0 jeton rouge lors de ce tirage de 2 jetons. On a donc $\binom{2}{0} = \ldots\ldots$.
- On note $\binom{2}{1}$ le nombre de chemins dans l'arbre qui permettent d'obtenir 1 jeton rouge lors de ce tirage de 2 jetons. On a donc $\binom{2}{1} = \ldots\ldots$.
- On note $\binom{2}{2}$ le nombre de chemins dans l'arbre qui permettent d'obtenir 2 jetons rouges lors de ce tirage de 2 jetons. On a donc $\binom{2}{2} = \ldots\ldots$.

Compléter alors le tableau suivant :

nombre de chemins donnant :	0 jeton rouge	1 jeton rouge	2 jetons rouges
Pour 1 jeton tiré	$\binom{1}{0} = \ldots\ldots$	$\binom{1}{1} = \ldots\ldots$	■
Pour 2 jetons tirés	$\binom{2}{0} = \ldots\ldots$	$\binom{2}{1} = \ldots\ldots$	$\binom{2}{2} = \ldots\ldots$

c) Tirage de 3 jetons

La situation peut se schématiser à l'aide de l'arbre ci-dessous :



- On note $\binom{3}{0}$ le nombre de chemins dans l'arbre qui permettent d'obtenir 0 jeton rouge lors de ce tirage de 3 jetons. On a donc $\binom{3}{0} = \ldots\ldots$.
- On note $\binom{3}{1}$ le nombre de chemins dans l'arbre qui permettent d'obtenir 1 jeton rouge lors de ce tirage de 3 jetons. On a donc $\binom{3}{1} = \ldots\ldots$.
- On note $\binom{3}{2}$ le nombre de chemins dans l'arbre qui permettent d'obtenir 2 jetons rouges lors de ce tirage de 3 jetons. On a donc $\binom{3}{2} = \ldots\ldots$.
- On note $\binom{3}{3}$ le nombre de chemins dans l'arbre qui permettent d'obtenir 3 jetons rouges lors de ce tirage de 3 jetons. On a donc $\binom{3}{3} = \ldots\ldots$.

Compléter alors le tableau suivant :

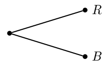
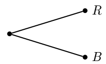
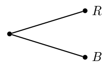
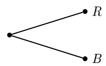
nombre de chemins donnant :	0 jeton rouge	1 jeton rouge	2 jetons rouges	3 jetons rouges
Pour 1 jeton tiré	$\binom{1}{0} = \ldots\ldots$	$\binom{1}{1} = \ldots\ldots$	■	■
Pour 2 jetons tirés	$\binom{2}{0} = \ldots\ldots$	$\binom{2}{1} = \ldots\ldots$	$\binom{2}{2} = \ldots\ldots$	■
Pour 3 jetons tirés	$\binom{3}{0} = \ldots\ldots$	$\binom{3}{1} = \ldots\ldots$	$\binom{3}{2} = \ldots\ldots$	$\binom{3}{3} = \ldots\ldots$

d) Tirage de 4 jetons

1. En imaginant ce que serait l'arbre correspondant :

- déterminer $\binom{4}{0}$ (le nombre de chemins dans l'arbre qui permettent d'obtenir 0 jeton rouge lors de ce tirage de 4 jetons). $\binom{4}{0} = \ldots\ldots$.
- déterminer $\binom{4}{4}$ (le nombre de chemins dans l'arbre qui permettent d'obtenir 4 jetons rouges lors de ce tirage de 4 jetons). $\binom{4}{4} = \ldots\ldots$.

2. Sans réaliser l'arbre complet, la situation au dernier niveau de l'arbre peut se résumer ainsi :

pour les 3 premiers jetons tirés	*pour le quatrième jeton*
un chemin donnant 0 jeton rouge pour les 3 premiers jetons tirés *(il y a* $\binom{3}{0}$ *chemins de ce type)*	
un chemin donnant 1 jeton rouge pour les 3 premiers jetons tirés *(il y a* $\binom{3}{1}$ *chemins de ce type)*	
un chemin donnant 2 jetons rouges pour les 3 premiers jetons tirés *(il y a* $\binom{3}{2}$ *chemins de ce type)*	
un chemin donnant 3 jetons rouges pour les 3 premiers jetons tirés *(il y a* $\binom{3}{3}$ *chemins de ce type)*	

• Quelles sont les deux seules façons d'obtenir 1 seul jeton rouge sur les 4 jetons tirés ?

En déduire que $\binom{4}{1} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

• Quelles sont les deux seules façons d'obtenir exactement 2 jetons rouges sur les 4 jetons tirés ?

En déduire que $\binom{4}{2} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

• Quelles sont les deux seules façons d'obtenir exactement 3 jetons rouges sur les 4 jetons tirés ?

En déduire que $\binom{4}{3} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

3. Compléter alors le tableau suivant :

nombre de chemins donnant :	0 jeton rouge	1 jeton rouge	2 jetons rouges	3 jetons rouges	4 jetons rouges
Pour 1 jeton tiré	$\binom{1}{0} = \ldots\ldots$	$\binom{1}{1} = \ldots\ldots$	■	■	■
Pour 2 jetons tirés	$\binom{2}{0} = \ldots\ldots$	$\binom{2}{1} = \ldots\ldots$	$\binom{2}{2} = \ldots\ldots$	■	■
Pour 3 jetons tirés	$\binom{3}{0} = \ldots\ldots$	$\binom{3}{1} = \ldots\ldots$	$\binom{3}{2} = \ldots\ldots$	$\binom{3}{3} = \ldots\ldots$	■
Pour 4 jetons tirés	$\binom{4}{0} = \ldots\ldots$	$\binom{4}{1} = \ldots\ldots$	$\binom{4}{2} = \ldots\ldots$	$\binom{4}{3} = \ldots\ldots$	$\binom{4}{4} = \ldots\ldots$

e) Cas général

On tire maintenant n jetons avec remise et, pour tout entier k compris entre 1 et n, on note $\binom{n}{k}$ le nombre de chemins dans l'arbre qui permettent d'obtenir k jetons rouges lors de ce tirage de n jetons.
En extrapolant le mécanisme établi pour 4 jetons, on peut en déduire :

nombre de chemins donnant :	$\cdots$	$(k-1)$ jetons rouges	k jetons rouges	$\cdots$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
Pour $(n-1)$ jetons tirés	$\cdots$	$\binom{n-1}{k-1}$	$\binom{n-1}{k}$	$\cdots$
Pour n jetons tirés	$\cdots$	$\cdots$	$\binom{n}{k} =$	$\cdots$

Compléter alors le tableau suivant :

nombre de chemins donnant :	0 jeton rouge	1 jeton rouge	2 jetons rouges	3 jetons rouges	4 jetons rouges	5 jetons rouges
Pour 4 jetons tirés	$\binom{4}{0} = \ldots$	$\binom{4}{1} = \ldots$	$\binom{4}{2} = \ldots$	$\binom{4}{3} = \ldots$	$\binom{4}{4} = \ldots$	■
Pour 5 jetons tirés	$\binom{5}{0} = \ldots$	$\binom{5}{1} = \ldots$	$\binom{5}{2} = \ldots$	$\binom{5}{3} = \ldots$	$\binom{5}{4} = \ldots$	$\binom{5}{5} = \ldots$

f) Application aux calculs de probabilités

On suppose maintenant que la boîte contient 4 jetons rouges et 6 jetons bleus et on tire successivement 5 jetons avec remise.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de jetons rouges obtenus lors de ce tirage de 5 jetons avec remise. On a lors :

- $p(X = 0) =$ ....
- $p(X = 1) =$ ....
- $p(X = 2) =$ ....
- $p(X = 3) =$ ....
- $p(X = 4) =$ ....
- $p(X = 5) =$ ....
- $E(X) =$ ....

....