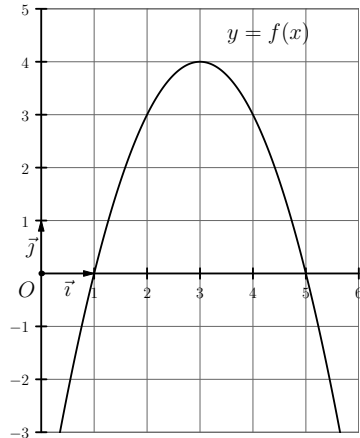


Primitives et intégration

► Exercice n°1

La courbe ci-dessous représente une fonction f continue sur \mathbb{R} et on note F une primitive de f sur \mathbb{R} .



Déterminer, en justifiant votre réponse, si les propositions ci-dessous sont vraies ou fausses :

- Proposition 1 : « $F'(3) = 0$ »
- Proposition 2 : « F est croissante sur $]1; 5[$ »
- Proposition 3 : « La tangente à la courbe représentative de la primitive F au point d'abscisse 2 admet comme équation $y = 4x$ »
- Proposition 4 : « La primitive F est convexe sur $]1; 5[$ »

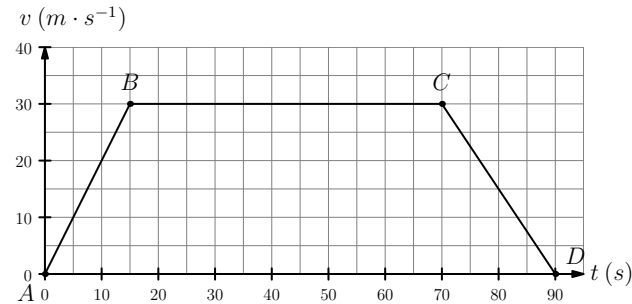
► Exercice n°2

Une entreprise fabrique x milliers d'objets avec $x \in [0; 15]$.

1. Le coût marginal, en euros, de cette production est définie sur $[0; 15]$ par $C_m(x) = 3x^2 - 36x + 750$. Étudier les variations de la fonction coût marginal sur $[0; 15]$. En déduire la quantité d'objets à fabriquer pour avoir un coût marginal minimum.
2. Le coût marginal est assimilé à la dérivée du coût total noté $C_T(x)$. Déterminer $C_T(x)$ sachant que $C_T(0) = 200$. (les coûts fixes s'élevant à 200 euros)

► Exercice n°3

Le graphique ci-dessous représente l'évolution de la vitesse v (en mètres par seconde) d'une moto sur une route rectiligne en fonction du temps t (en secondes).



1. On note d la fonction qui donne la distance parcourue (en mètres) en fonction du temps t . On rappelle que la fonction vitesse v est la dérivée de la fonction distance d . Compléter la phrase suivante :
Si $v(t) = d'(t)$ alors on peut dire que la fonction est une primitive de la fonction
2. Mouvement entre 0 et 15 secondes :
 - a) En déterminant une équation de la droite (AB) , déterminer l'expression de $v(t)$ en fonction de t pour t compris entre 0 et 15 secondes.
 - b) En déduire $d(t)$ pour t compris entre 0 et 15 secondes.
 - c) Quelle est la distance parcourue au bout de 15 secondes ?
3. Mouvement entre 15 et 70 secondes :
 - a) Quelle est l'expression de $v(t)$ entre 15 et 70 secondes ?
En déduire $d(t)$ pour t compris entre 15 et 70 secondes.
 - b) Quelle est la distance parcourue au bout de 70 secondes ?
4. Mouvement entre 70 et 90 secondes :
 - a) En déterminant une équation de la droite (CD) , déterminer l'expression de $v(t)$ en fonction de t pour t compris entre 70 et 90 secondes.
 - b) En déduire $d(t)$ pour t compris entre 70 et 90 secondes.
 - c) Quelle est la distance parcourue au bout des 90 secondes ?

Remarque :

- Entre 0 et 15 secondes, le mouvement est dit uniformément accéléré ;
- Entre 15 et 70 secondes, le mouvement est dit uniforme ;
- Entre 70 et 90 secondes, le mouvement est dit uniformément décéléré.

► **Exercice n°4**

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_2^3 (x^2 + 1) dx$

2. $\int_1^2 \left(3x + 1 + \frac{1}{x} \right) dx$

3. $\int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$

4. $\int_1^e \frac{1}{x} (\ln x) dx$

5. $\int_{-1}^0 3e^{-x} dx$

6. $\int_0^{\ln 2} (e^x - e^{2x}) dx$

7. $\int_0^1 xe^{-x^2} dx$

► **Exercice n°5**

1. Montrer que la fonction F définie par $F(x) = x \ln x$ est une primitive sur $]0; +\infty[$ de la fonction f définie par $f(x) = 1 + \ln x$.

2. En déduire la valeur de $\int_1^2 f(x) dx$

► **Exercice n°6**

1. Montrer que la fonction F définie par $F(x) = (-2x - 3)e^{-x}$ est une primitive sur \mathbb{R} de la fonction f définie par $f(x) = (2x + 1)e^{-x}$.

2. En déduire la valeur de $\int_0^1 f(x) dx$

► **Exercice n°7**

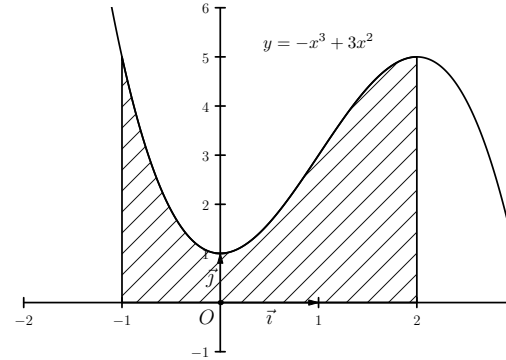
La probabilité qu'une année donnée la hauteur maximale d'un fleuve soit inférieure à a mètres est égale à $P(a) = \int_0^a 0,4x e^{-0,2x^2} dx$.

1. Calculer $P(a)$ en fonction de a .

2. En déduire la valeur de a pour laquelle $P(a) = 0,99$.

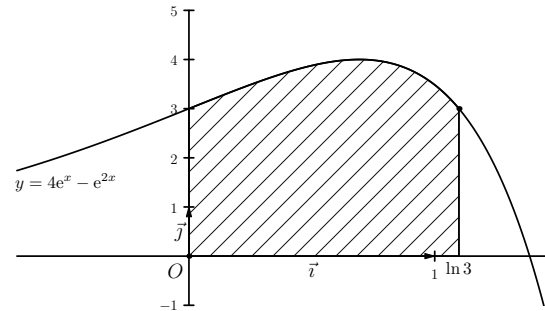
► **Exercice n°8**

Calculer, en unités d'aire, l'aire de la zone hachurée ci-dessous :



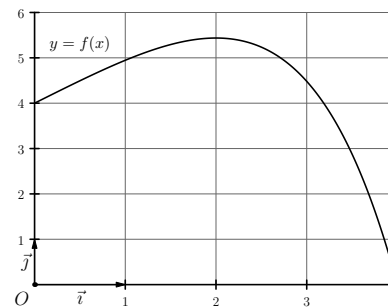
► **Exercice n°9**

Calculer, en unités d'aire, l'aire de la zone hachurée ci-dessous :



► **Exercice n°10**

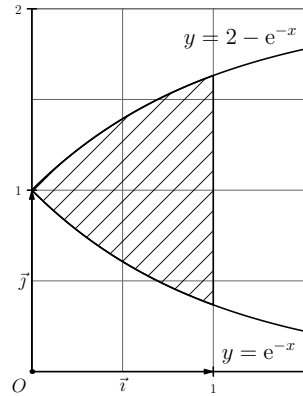
La courbe représentative d'une fonction f définie sur $[0; 4]$ est donnée ci-dessous :



Justifier, d'après le graphique, que $12 \leq \int_0^3 f(x) dx \leq 18$.

► **Exercice n°11**

Calculer, en unités d'aire, l'aire de la zone hachurée ci-dessous :



► **Exercice n°12**

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x - \frac{\ln x}{x}$.

Dans un repère orthonormé d'unité 2 cm, on note C_f la courbe représentative de la fonction f et D la droite d'équation $y = x$.

1. Étudier la position relative de C_f et D sur $]0; +\infty[$.
2. Calculer l'aire A (en cm^2) du domaine délimité par la courbe C_f , la droite D et par les droites d'équation $x = 1$ et $x = e$.

► **Exercice n°13**

Calculer la valeur moyenne sur $[1; 4]$ de la fonction f définie par $f(x) = \frac{2}{x}$.

► **Exercice n°14**

La vitesse (en mètres par seconde) d'un objet en mouvement est définie par $v(t) = 25(1 - e^{-2t})$ (t en secondes).

Calculer la vitesse moyenne de l'objet (la valeur moyenne de la fonction « vitesse ») entre $t = 1$ s et $t = 2$ s.

► **Exercice n°15**

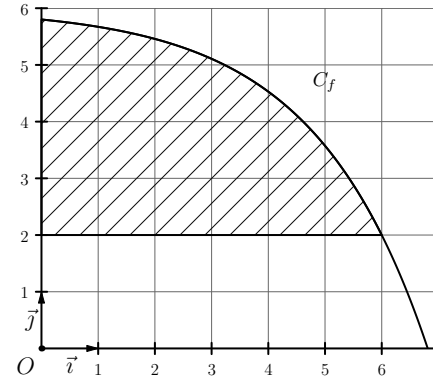
Le cours d'une action en euros est modélisée par la fonction f définie sur $[1; 13]$ par $f(t) = 20t + 40 - 80 \ln t$ où t représente le nombre de mois écoulés depuis le 1^{er} décembre 2019.

1. Étudier les variations de f sur $[1; 13]$.
2. Justifier que la fonction F définie par $F(t) = 10t^2 + 120t - 80t \ln t$ est une primitive de f sur $[1; 13]$.

3. Calculer la valeur moyenne de f sur $[1; 13]$.

► **Exercice n°16**

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = 6 - 4e^{0.5x-3}$ et C_f sa courbe représentative dans le repère ci-dessous.



1. Déterminer l'abscisse du point d'intersection entre C_f et l'axe des abscisses.
2. Justifier que $f(6) = 2$.
3. Montrer qu'il existe un point de C_f où la tangente admet un coefficient directeur égal à -2 .
4. Justifier que f est concave sur $[0; +\infty[$.
5. Calculer l'aire, en unités d'aire, de la partie hachurée sur le graphique.

► **Exercice n°17**

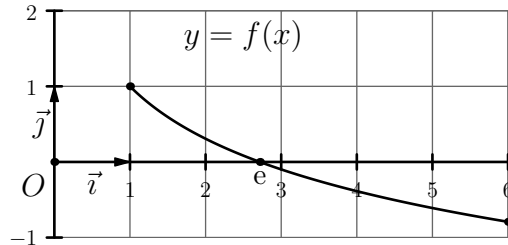
On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(t) = 20 - 20e^{-0.1t}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. a) Déterminer la limite de f en $-\infty$.
b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
c) La courbe C_f admet-elle une asymptote horizontale? Si oui, en donner une équation.
d) Dériver f et justifier que f est strictement croissante sur \mathbb{R} .
2. Un fil conducteur parcouru par un courant électrique d'intensité constante s'échauffe par effet Joule et sa température est donnée, en degrés Celsius, par $f(t)$ où t est le temps exprimé en secondes.
a) Quelle est la température du fil au bout de 10 sec? On donnera une valeur approchée du résultat à 0,1C près.

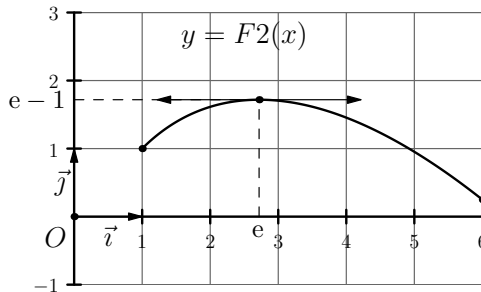
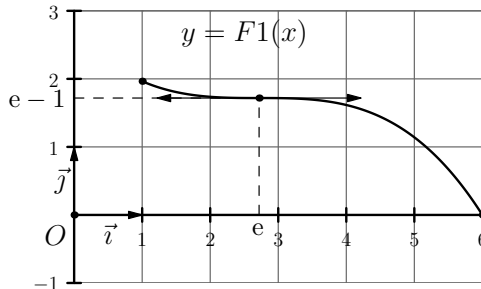
- b) Déterminer, en résolvant une équation, au bout de combien de temps la température du fil sera de 19°C. On donnera le résultat à une seconde près.
- c) Déterminer une valeur approchée à 0,1°C près de la température moyenne du fil pendant la première minute.

► **Exercice n°18**

La courbe d'une fonction f définie sur $[0; 6]$ est donné ci-dessous :



1. Parmi les deux courbes ci-dessous, une seule représente une primitive de f sur $[0; 6]$. Déterminer laquelle.



2. Déterminer la valeur de $I = \int_1^e f(x) dx$. Que représente graphiquement I ?

► **Exercice n°19**

1. a) Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $1 - e^{x-1} \geq 0$.
- b) Soit g la fonction définie sur $[0; 1]$ par $g(x) = x(1 - e^{x-1})$. Justifier que $g(x) \geq 0$ pour tout x de $[0; 1]$.
- c) Montrer que la fonction G définie par $G(x) = (1 - x)e^{x-1} + \frac{x^2}{2}$ est une primitive de g sur $[0; 1]$.
2. Soit f la fonction définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = xe^{x-1}$.

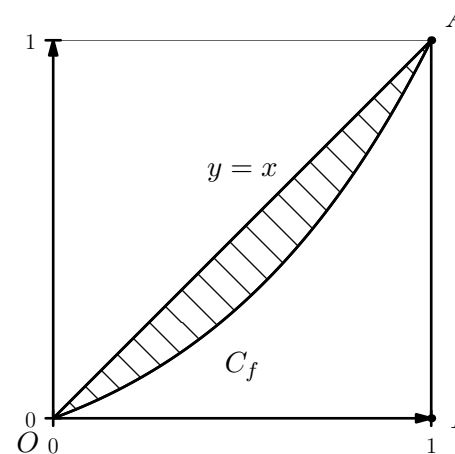
- a) Vérifier que :

- $f(0) = 0$;
- $f(1) = 1$;
- f est croissante sur $[0; 1]$;
- $f(x) \leq x$ pour tout x de $[0; 1]$.

(on utilisera le résultat de la question 1. b)

Remarque : la courbe d'une fonction vérifiant ces conditions est appelée en économie une courbe de Lorenz.

- b) Dans le graphique ci-dessous figure la courbe de la fonction f et la droite d'équation $y = x$.



On appelle coefficient de Gini associé à la courbe de Lorenz définie par la fonction f le rapport $\frac{\text{aire de la partie hachurée}}{\text{aire du triangle } OIA}$.

En remarquant que l'aire de la partie hachurée est égale à $\int_0^1 g(x) dx$, calculer la valeur du coefficient de Gini associé à la courbe de Lorenz définie par la fonction f .