

Fonction logarithme népérien

► Exercice n°1

Exprimer les nombres suivants en fonction de $\ln(2)$:

1. $\ln(8)$
2. $\ln(8) + \ln(32)$
3. $\ln(64) - \ln(8)$
4. $\ln(16) - 3\ln(2)$

► Exercice n°2

Exprimer les nombres suivants en fonction de $\ln(3)$:
(e est le nombre tel que $\ln e = 1$)

1. $\ln\left(\frac{1}{9}\right)$
2. $\ln(81) - 2\ln(3)$
3. $\ln\left(\frac{3}{e}\right)$
4. $\ln(9e^2)$

► Exercice n°3

Dériver la fonction f dans les cas suivants :

1. f est définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x \ln x$
2. f est définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = (\ln x)^2$
3. f est définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{\ln x}$
4. f est définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{4 \ln x}{x^2}$

► Exercice n°4

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x + \ln x$
2. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln x}{x}$
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - \ln x)$
4. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} 3(\ln x) + x^2$

5. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} - \ln x$

► Exercice n°5

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

1. $\ln(x + 1) = 0$
2. $\ln(2 - 3x) = \ln 4$
3. $\ln(4x) = \ln(x - 3)$
4. $\ln(x - 1) + \ln(x - 2) = \ln 6$
5. $\ln x = 4$
6. $\ln(2x) = 5$
7. $\ln(3x) = 1$
8. $\ln(1 + x) = -2$

► Exercice n°6

Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes :

1. $\ln(x + 1) \leq 0$
2. $\ln x \geq 3$
3. $1 - \ln x \geq 0$

► Exercice n°7

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x + \ln x$.

Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$ et étudier ses variations sur $]0; +\infty[$.

► Exercice n°8

Soit f la fonction définie sur $[0,5; +\infty[$ par $f(x) = x(\ln x - 1)$.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. Étudier les variations de f sur $[0,5; +\infty[$.
3. Étudier le signe de $f(x)$ sur $[0,5; +\infty[$.

► Exercice n°9

Quand l'oreille d'un individu est soumise à une pression acoustique x , exprimée en bars, l'intensité sonore, exprimée en décibels, du bruit responsable de cette pression est donnée par :

$$f(x) = 8,68 \times \ln x + 93,28$$

1. Calculer l'intensité sonore correspondante à une pression acoustique de 5 bars.
2. Justifier que f est une fonction strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
4. Un individu normal ne peut supporter un bruit supérieur à 120 décibels.
 - a) On cherche à connaître le premier nombre entier x de bars pour lequel l'intensité $f(x)$ dépasse 120 décibels à l'aide d'un script python. Pour cela on part d'une pression $x = 1$ que l'on augmente de 1 tant que cela est nécessaire. Compléter la 3^e ligne du code python ci-dessous pour qu'il réponde au problème :

```

from math import*
x=1
while 8.68*log(x)+93.28 ..... :
    x=x+1
print(x)

```

Remarque : avec python le logarithme népérien est donné par $\log()$

- b) Résoudre dans $]0; +\infty[$ l'équation $f(x) = 120$ et retrouver ce que devrait afficher le script python.

► Exercice n°10

La fonction B définie sur $[1; 6]$ par $B(x) = -x^2 + 10x - 9 - 8 \ln x$ représente le bénéfice mensuel (en dizaines de milliers d'euros) réalisé par une entreprise lors de la vente de x centaines d'objets produits par mois. En étudiant les variations de B , déterminer la quantité d'objets à produire par mois pour obtenir un bénéfice mensuel maximal.

► Exercice n°11

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 3 - 2x - \ln x$.

1. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
2. Dériver f et étudier ses variations sur $]0; +\infty[$.
3. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1.
4. Étudier, par le calcul, la position relative de la courbe représentative de f et de la droite D d'équation $y = 3 - 2x$ sur $]0; +\infty[$.
5. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution x_0 dans $[1; 2]$. Déterminer une valeur approchée de x_0 à 0,1 près par défaut.
6. Justifier que f est convexe sur $]0; +\infty[$.

► Exercice n°12

Dériver la fonction f dans les cas suivants :

1. f est définie sur $]2; +\infty[$ par $f(x) = \ln(3x - 6)$

2. f est définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \ln(1 + x^2)$
3. f est définie sur $] -\infty; 2[$ par $f(x) = \ln(-2x + 4)$
4. f est définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \ln\left(3 + \frac{1}{x}\right)$
5. f est définie sur $]2; +\infty[$ par $f(x) = \ln\left(\frac{3x}{x-2}\right)$

► Exercice n°13

Une étude portant sur le prix d'un type de cahiers aboutit à la modélisation suivante :

- f est la fonction définie sur $]0; 1]$ par $f(x) = -4 \ln x$;
- g est la fonction définie sur $]0; 1]$ par $g(x) = 4 \ln(6x + 1)$;
- $f(x)$ et $g(x)$ représentent respectivement la quantité de cahiers demandée et offerte, exprimée en milliers, en fonction du prix unitaire x du cahier exprimé en euros.

1. Déterminer les limites des fonctions f et g en 0.
2. Étudier les variations des fonctions f et g sur $]0; 1]$ et dresser leur tableau de variation.
3. En économie, le prix d'équilibre est la valeur de x pour laquelle $f(x) = g(x)$. Déterminer la valeur exacte de ce prix d'équilibre.

► Exercice n°14

Déterminer, dans chacun des cas suivants, le plus petit entier positif n vérifiant la relation donnée :

1. $3^n \geq 800$
2. $\left(\frac{1}{3}\right)^n \leq 0,01$
3. $(1,03)^n \geq 2$
4. $(0,95)^n \leq 0,2$

► Exercice n°15

Le pH d'une solution est défini par $\text{pH} = -\log[\text{H}_3\text{O}^+]$ où $[\text{H}_3\text{O}^+]$ désigne la concentration en moles par litre d'ions H_3O^+ contenus dans la solution.

1. Une solution de 150 millilitres admet une concentration d'ions H_3O^+ de 10^{-2} moles par litre.
 - a) Calculer le pH de cette solution.
 - b) Combien de moles d'ions H_3O^+ contient cette solution ?

2. On ajoute à la solution 850 millilitres d'eau distillée.
 - a) Quelle est la concentration en ions H_3O^+ dans la nouvelle solution obtenue ?
 - b) En déduire le nouveau pH.

► **Exercice n°16**

L'échelle de Richter sert à mesurer la puissance d'un tremblement de terre. La magnitude d'un séisme sur cette échelle est donnée par $M = \log\left(\frac{A}{A_0}\right)$ où A représente l'amplitude maximale des ondes relevée par un sismographe et A_0 une amplitude référence.

1. Que vaut $\frac{A}{A_0}$ pour un séisme de magnitude égale à 5 ?
2. Si l'amplitude maximale des ondes A est multipliée par 100, de combien augmente la magnitude ?

► **Exercice n°17**

Pour mesurer la perte de puissance dans une fibre optique, on utilise le coefficient d'atténuation (exprimé en décibels par kilomètre) défini par $A = \frac{1}{L} \times 10 \times \log\left(\frac{P_e}{P_s}\right)$ où L est la longueur (en kilomètres) de la fibre optique, P_e est la puissance (en mW) du signal lumineux à l'entrée de la fibre et P_s est la puissance (en mW) du signal lumineux à la sortie de la fibre.

1. Un technicien effectue une mesure à la sortie d'une fibre de 5 km dont la puissance d'entrée est $P_e = 5$ mW. Il obtient une puissance de sortie égale à $P_s = 3,5$ mW. Calculer la valeur du coefficient d'atténuation correspondant.
2. Lorsque $P_s = \frac{1}{10} \times P_e$, on considère que la fibre optique doit-être remplacée. Quelle est alors la valeur de A pour une fibre de 10 km ?
3. Expliquer pourquoi le coefficient d'atténuation ne peut pas être négatif.