

Complément sur la fonction exponentielle - Introduction au logarithme

► Exercice n°1

Compléter les égalités suivantes :

a) $e^{\dots} \times e^5 = e^{-3}$ b) $e^{\dots} \times e^{-4x} = e^{7x}$ c) $\frac{e^{\dots}}{e^{-3}} = e^{-1}$ d) $\frac{e^{4x}}{e^{\dots}} \times e^{-6x} = e^{5x}$

► Exercice n°2

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + e^x$

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x - 3e^x$

3. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{e^x}{x}$

4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - \frac{1}{x}$

► Exercice n°3

Dériver la fonction f dans les cas suivants :

1. f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = xe^x$

2. f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$

3. f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (1 - x^2)e^x$

4. f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{1}{3 + e^x}$

5. f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (1 - e^x)^2$

► Exercice n°4

Résoudre dans \mathbb{R} :

1. l'équation $e^{x+2} = 1$

2. l'équation $e^x + 1 = 0$

3. l'équation $e^{x^2 - x - 11} = e$

4. l'inéquation $e^{-x} - 1 < 0$

► Exercice n°5

Soit f définie sur $[-10; +\infty[$ par $f(x) = 2xe^x$.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. Étudier les variations de f sur $[-10; +\infty[$.

► Exercice n°6

Dériver la fonction f dans les cas suivants :

1. f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{-4x}$

2. f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{x^2+3}$

3. f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = e^{1-\frac{1}{x}}$

4. f définie sur $] -1; +\infty[$ par $f(x) = e^{\frac{3x}{x+1}}$

► Exercice n°7

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x}$

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x} + \frac{1}{x}$

3. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} e^{x^{\frac{1}{2}}}$

► Exercice n°8

Après une injection intraveineuse de glucose, la glycémie (taux de glucose sanguin) peut-être modélisée par une fonction g de la forme $g(t) = Ae^{-Kt}$ où t est le temps écoulé en minutes depuis un instant choisi comme origine du temps et A et K sont des constantes.

1. Justifier qu'à l'instant $t = 0$, la glycémie est égale à A .
2. Une étude sur un patient a montré que sa glycémie était égale à 2 à l'instant $t = 0$ et que la constante K qui lui correspond est égal à 0,016. On a donc $g(t) = 2e^{-0,016t}$.
 - a) Déterminer la glycémie de ce patient à $t = 10$ minutes. On donnera une valeur approchée du résultat à 0,01 près.
 - b) Justifier mathématiquement que g est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$.
 - c) Préciser $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t)$.

► **Exercice n°9**

Compléter les équivalences suivantes :

1. $e^x = 7 \Leftrightarrow x = \dots\dots$
2. $e^x = 0,01 \Leftrightarrow x = \dots\dots$
3. $e^{-x} = 0,9 \Leftrightarrow -x = \dots\dots \Leftrightarrow x = \dots\dots$
4. $e^{-2x} = 3 \Leftrightarrow -2x = \dots\dots \Leftrightarrow x = \dots\dots$

► **Exercice n°10**

Simplifier les expressions suivantes :

$$A = e^{\ln 7} \quad B = e^{-\ln 5} \quad C = e^{3 \ln 4}$$
$$D = e^{\ln 5 + \ln 4} \quad E = e^{-2 \ln 7}$$

► **Exercice n°11**

Résoudre dans \mathbb{R} :

1. l'équation $e^x = 3$
2. l'équation $e^{x+3} = 5$
3. l'équation $3e^{-x} - 9 = 0$
4. l'inéquation $e^x \geq 7$
5. l'inéquation $8 - 2e^x \geq 0$

► **Exercice n°12**

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{2x} - 4e^x$.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$
2. En remarquant que $f(x) = e^x(e^x - 4)$, déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. La courbe C_f admet-elle des asymptotes horizontales ?
4. a) Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $e^x - 2 \geq 0$.
b) Dériver f et montrer que $f'(x) = 2e^x(e^x - 2)$.
c) Dédire des questions précédentes le tableau de variations de f sur \mathbb{R} .

► **Exercice n°13**

Un solide dont la température à l'instant $t = 0$ est de 25 C est placé à l'extérieur, où la température est de 8 C. La température de ce corps (en degré celsius) à l'instant t (en secondes) est donné par $\theta(t) = 8 + 17e^{kt}$ où k est une constante réelle.

1. On observe qu'au bout de deux minutes, la température du solide est de 20 C. En déduire une valeur arrondie de k à 0,0001 près.
2. Au bout de combien de temps, la température du solide sera-t-elle de 15 C ?

► **Exercice n°14**

Un corps radioactif se désintègre en transformant une partie de ses noyaux suivant la loi $N(t) = N_0 e^{-kt}$ où N_0 est le nombre de noyaux radioactifs au début de l'observation, $N(t)$ le nombre de noyaux radioactifs à l'instant t exprimé en heures, k une constante réelle.

1. Déterminer une valeur arrondie à 0,001 près de la constante k pour le thorium, sachant qu'avec $N_0 = 1000$, on a $N(1) = 937$.
2. Au bout de combien de temps le nombre de noyaux de thorium passera-t-il de 1000 à 500 ?
3. Au bout de combien de temps le nombre de noyaux de thorium passera-t-il de 500 à 250 ?

► **Exercice n°15**

La température, en degrés celsius, d'une réaction chimique à l'instant t , en minutes, est donnée par $f(t) = (20t + 10)e^{-0,5t}$.

1. Donner la température initiale (celle correspondant à $t = 0$).
2. La température de la réaction peut-elle passer en dessous de 0 ?
3. Étudier les variations de f sur $[0; +\infty[$.

► **Exercice n°16**

Le taux d'hydratation de la peau, x heures après avoir appliqué une crème solaire, est modélisé par la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = 50x e^{-0,5x+1}$.

1. En étudiant les variations de la fonction f sur $[0; +\infty[$, déterminer le moment où le taux d'hydratation est maximal.
2. Justifier que l'équation $f(x) = 50$ admet deux solutions : une dans l'intervalle $[0; 1]$ et une autre dans l'intervalle $[5; 5,5]$.
3. La crème solaire ne peut être commercialisée que si le taux d'hydratation dépasse 50% pendant une durée dépassant 6 heures. Ce critère est-il rempli ?

► **Exercice n°17**

1. Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $1 - e^{-0,39x} > 0$.
2. On admet que, pour emprunter 100 000 euros au taux annuel de 4% remboursable en t années ($t > 1$), le montant annuel à rembourser est donné (en milliers d'euros) par $f(t) = \frac{4}{1 - e^{-0,39t}}$.
 - a) Quelle est le montant annuel à rembourser si l'emprunt doit être remboursé sur 10 ans ? sur 15 ans ?
 - b) Justifier que la fonction f est décroissante sur $[1; +\infty[$.
 - c) Justifier que le montant annuel à rembourser est toujours supérieur à 4 000 euros.