Compléments sur l'exponentielle

©Pascal Brachet

`https://wwww.xm1math.net`

Pump up the volume and let's do some maths

1. Rappels sur les propriétés d'un exponentiel

Propriété(s)

- $e^0 = 1$
- *Un exponentiel est toujours strictement positif*
- $e^a \times e^b = e^{a+b}$
- $\frac{1}{e^a} = e^{-a}$
- $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$
- *Pour tout entier* n, $(e^a)^n = e^{na}$

Ainsi, pour tout x on a : $\mathrm{e}^{-x} = \frac{1}{\mathrm{e}^x}$; $(\mathrm{e}^x)^2 = \mathrm{e}^{2x}$; $(\mathrm{e}^x)^3 = \mathrm{e}^{3x}$ ...

▶ *Exemples :*

- $\mathrm{e}^2 \times \mathrm{e}^3 = \mathrm{e}^{2+3} = \mathrm{e}^5$
- $\frac{\mathrm{e}^7}{\mathrm{e}^2} = \mathrm{e}^{7-2} = \mathrm{e}^5$
- $\frac{(\mathrm{e}^x)^2}{\mathrm{e}^{3x}} = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{3x}} = \mathrm{e}^{2x-3x} = \mathrm{e}^{-x}$
- $\frac{\mathrm{e}^{5x} \times \mathrm{e}^{-2x}}{(\mathrm{e}^x)^2} = \frac{\mathrm{e}^{5x-2x}}{\mathrm{e}^{2x}} = \frac{\mathrm{e}^{3x}}{\mathrm{e}^{2x}} = \mathrm{e}^{3x-2x} = \mathrm{e}^x$

2. La fonction exponentielle

Elle est définie sur $\mathbb{R}$.

a) Limites

Propriété(s)

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \qquad ; \qquad \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

b) Dérivée et sens de variation

Propriété(s)

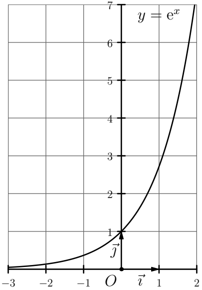
Pour tout x, $(e^x)' = e^x$

▶ *Conséquence :* comme un exponentiel est toujours strictement positif, la dérivée de l'exponentielle prend des valeurs toujours strictement positives. La fonction exponentielle est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$+\infty$
e^x	0	↗	$+\infty$

c) Convexité

Pour tout x, $(\mathrm{e}^x)''(x) = \mathrm{e}^x > 0$. Donc la fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$.



3. Équations $e^x = e^a$ et inéquations

Comme la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on a :

Propriété(s)

- $e^x = e^a \Leftrightarrow x = a$
- $e^x > e^a \Leftrightarrow x > a$
- $e^x \geqslant e^a \Leftrightarrow x \geqslant a$
- $e^x < e^a \Leftrightarrow x < a$
- $e^x \leqslant e^a \Leftrightarrow x \leqslant a$

▶ *Exemples :*

- $e^{2x} = e^4 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$
- $e^{3x+6} = 1 \Leftrightarrow e^{3x+6} = e^0 \Leftrightarrow 3x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -2$
- $e^{(x^2)} = e^4 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -2$
- $e^{2x} < 1 \Leftrightarrow e^{2x} < e^0 \Leftrightarrow 2x < 0 \Leftrightarrow x < 0$
- $e^{1-x} \geqslant e^2 \Leftrightarrow 1 - x \geqslant 2 \Leftrightarrow 1 - 2 \geqslant x \Leftrightarrow -1 \geqslant x$

4. Fonctions de la forme e^u

a) Dérivée de e^u

Propriété(s)

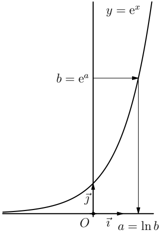
Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I alors e^u est aussi dérivable sur I et on a $(e^u)' = u'e^u$

- *Exemples :*
  - Si $f(x) = \mathrm{e}^{4x}$ alors $f'(x) = \underbrace{4}_{\text{dérivée de } 4x} \times \mathrm{e}^{4x}$.
  - Si $f(x) = \mathrm{e}^{x^2+3x}$ alors $f'(x) = \underbrace{(2x+3)}_{\text{dérivée de } x^2+3x} \times \mathrm{e}^{x^2+3x}$.
  - Si $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ alors $f'(x) = \underbrace{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}_{\text{dérivée de } \frac{1}{x}} \times \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

b) Limites de e^u

- *Exemples :*
  - $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-2x} = 0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} -2x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$.
  - $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{(x^2)} = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$.
  - $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = 1$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to0} \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^0 = 1$.

5. Introduction au logarithme népérien



a) Antécédent d'un réel b par la fonction exponentielle

La fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$: Pour tout réel b strictement positif, il existe un unique réel a tel que $e^a = b$.

Ce nombre est appelé **logarithme népérien** de b et est noté $\ln b$.

Ainsi, on a l'équivalence fondamentale : $\boxed{e^a = b \Leftrightarrow a = \ln b}$

b) Conséquences

- $e^0 = 1 \Leftrightarrow 0 = \ln 1$
- $e^1 = e \Leftrightarrow 1 = \ln e$
- $e^x = e^x \Leftrightarrow x = \ln(e^x)$
- $\ln x = \ln x \Leftrightarrow e^{\ln x} = x$

Propriété(s)

- $\ln x$ *n'existe que si* $x > 0$
- $\ln 1 = 0$
- $\ln e = 1$
- $\ln(e^x) = x$
- $e^{\ln x} = x$

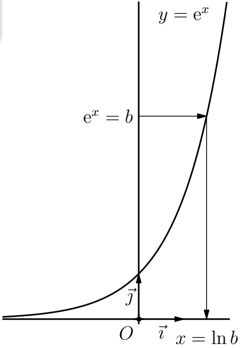
▶ *Exemples :*

- $e^{\ln 4} = 4$
- $e^{-\ln 2} = \frac{1}{e^{\ln 2}} = \frac{1}{2}$
- $e^{\ln 2 + \ln 3} = e^{\ln 2} \times e^{\ln 3} = 2 \times 3 = 6$
- $e^{\ln 2 - \ln 3} = \frac{e^{\ln 2}}{e^{\ln 3}} = \frac{2}{3}$

6. Équations $e^x = b$ et inéquations

Propriété(s)

$e^x = b \Leftrightarrow x = \ln b$ *(si $b > 0$)*



- *Exemples :*
  - $e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$
  - $e^x = -1$ est impossible
  - $e^{x+2} = 3 \Leftrightarrow x + 2 = \ln 3 \Leftrightarrow x = -2 + \ln 3$
  - $e^{2x} - 5 = 0 \Leftrightarrow e^{2x} = 5 \Leftrightarrow 2x = \ln 5 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \ln 5$
    (il faut d'abord isoler l'exponentiel avant d'utiliser l'équivalence)
  - $e^{-0,1x} = 0,7 \Leftrightarrow -0,1x = \ln 0,7 \Leftrightarrow x = \frac{\ln 0,7}{-0,1}$

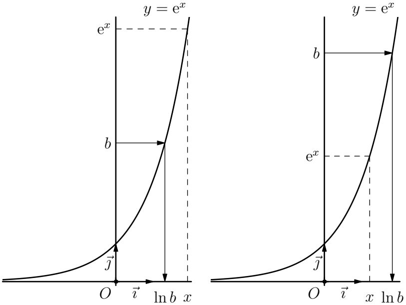
6. Équations $\mathrm{e}^x = b$ et inéquations

Propriété(s)

si $b > 0$ *:*

- $e^x > b \Leftrightarrow x > \ln b$
- $e^x \geqslant b \Leftrightarrow x \geqslant \ln b$

- $e^x < b \Leftrightarrow x < \ln b$
- $e^x \leqslant b \Leftrightarrow x \leqslant \ln b$



▶ *Exemples :*

- $\mathrm{e}^x \leqslant 5 \Leftrightarrow x \leqslant \ln 5$
- $\mathrm{e}^{-2x} > 3 \Leftrightarrow -2x > \ln 3 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{2}\ln 3$
- $4 - \mathrm{e}^x \leqslant 0 \Leftrightarrow 4 \leqslant \mathrm{e}^x \Leftrightarrow \ln 4 \leqslant x$
- $\mathrm{e}^{-0,1x} < 0,5 \Leftrightarrow -0,1x < \ln 0,5 \Leftrightarrow x > -\frac{\ln 0{,}5}{0{,}1}$

Fin du chapitre