Dérivation, continuité et convexité

©Pascal Brachet

https://wwww.xm1math.net

Pump up the volume and let's do some maths

1. Rappels et compléments sur la dérivation

Définition

- f est dite dérivable en a si $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe et est égale à un nombre fini noté alors $f'(a)$ et appelé nombre dérivé de f en a.
- Si f est dérivable en tout point x d'un intervalle I, on dit que f est dérivable sur I et on appelle fonction dérivée de f la fonction notée f' qui à tout x de I associe $f'(x)$.

• **Dérivées des fonctions usuelles :**

$f(x) = b \Rightarrow f'(x) = 0$	$f(x) = ax + b \Rightarrow f'(x) = a$
$f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$	$f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$
$f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2$	$f(x) = \dfrac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$
$f(x) = \dfrac{1}{x^2} \Rightarrow f'(x) = -\dfrac{2}{x^3}$	$f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

1. Rappels et compléments sur la dérivation

• Opérations sur les fonctions dérivables :

Fonction	Fonction dérivée
$u+v$	$u'+v'$
$k\,u \quad (k \text{ réel})$	$k\,u'$
$u\,v$	$u'\,v+u\,v'$

Fonction	Fonction dérivée
u^2	$2\,u'\,u$
$\dfrac{1}{u}$	$-\dfrac{u'}{u^2}$
$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'\,v-u\,v'}{v^2}$

Si $g(x)=f(ax+b)$ alors $g'(x)=af'(ax+b)$

▶ *Exemple :* Si $g(x)=\sqrt{5x+2}$ alors $g'(x)=\underbrace{5}_{\text{dérivée de }5x+2}\times\underbrace{\dfrac{1}{2\sqrt{5x+2}}}_{\text{car la dérivée de }\sqrt{x}\text{ est }\frac{1}{2\sqrt{x}}}$

• Dérivée seconde :

Définition

Si f est dérivable sur un intervalle I et si sa dérivée f' est aussi dérivable sur I, on appelle fonction dérivée seconde de f sur I la fonction notée f'' égale à la dérivée de f'

▶ *Exemple :* Si $f(x)=x^3+x^2+7x+1$ alors $f'(x)=3x^2+2x+7$ et $f''(x)=6x+2$.

2. Tangente à la courbe d'une fonction dérivable

- **Équation :**

Propriété(s)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I contenant a :

- *La tangente à la courbe de f au point d'abscisse a est la droite passant par le point de la courbe d'abscisse a et dont **le coefficient directeur est égal à** $f'(a)$.*
- *Une équation de cette tangente est $y = f(a) + f'(a)(x - a)$.*

▶ *Exemple :*
Équation de la tangente au point d'abscisse 2 de la courbe de la fonction f définie sur $]1\,;+\infty[$ par $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$: $y = f(2) + f'(2)(x-2)$

- $f(2) = \frac{2\times 2+1}{2-1} = 5$
- $f'(x) = \frac{2\times(x-1)-(2x+1)\times 1}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x-1)^2}$
- $f'(2) = \frac{-3}{(2-1)^2} = -3$

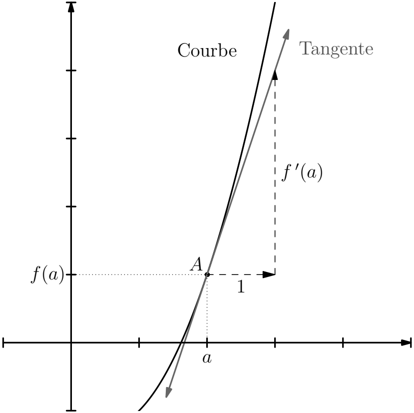
Une équation de la tangente est donc : $y = 5 - 3(x-2) \Leftrightarrow y = -3x + 11$

xm1math.net

2. Tangente à la courbe d'une fonction dérivable

- **Construction graphique de la tangente au point d'abscisse a :**

  - On part du point de la courbe d'abscisse a ;
  - En se décalant horizontalement d'une unité selon l'axe des abscisses, puis verticalement de $f'(a)$ unités selon l'axe des ordonnées, on obtient un deuxième point de la tangente.



2. Tangente à la courbe d'une fonction dérivable

• **Détermination graphique de la valeur de $f'(a)$ à partir de la tangente au point A d'abscisse a :**
On sait que $f'(a)$ est égal au coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse a.
Donc, si B est un autre point de la tangente, on a $f'(a) = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

• **Recherche des éventuels points de la courbe où la tangente admet un certain coefficient directeur égal à m :** Comme le coefficient directeur de la tangente est égal à la valeur de la dérivée, cela revient à chercher les x tels que $f'(x) = m$.

▶ *Exemple :* Recherche des points éventuels de la courbe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 6x + 5$ où la tangente admettrait un coefficient directeur égal à 4.
Cela revient à chercher les points où la valeur de la dérivée est égale à 4.
Or, $f'(x) = 4 \Leftrightarrow -2x + 6 = 4 \Leftrightarrow -2x = -2 \Leftrightarrow x = 1$.
Le point de la courbe de f d'abscisse 1 convient.

3. Utilisation des dérivées pour étudier les variations d'une fonction

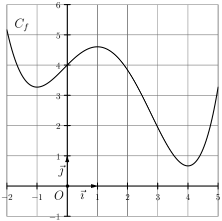
• Lien entre le signe de la dérivée et les variations d'une fonction dérivable

Théorème

Étant donné f une fonction dérivable sur un intervalle I.

1. - *Si f est croissante sur I alors $f'(x)$ reste positif ou nul sur I ;*
   - *Si f est décroissante sur I alors $f'(x)$ reste négatif ou nul sur I.*
2. - *Si la dérivée reste strictement positive sur I (sauf en un nombre fini de points isolés où elle peut s'annuler) alors on peut affirmer que la fonction est strictement croissante sur I ;*
   - *Si la dérivée reste strictement négative sur I (sauf en un nombre fini de points isolés où elle peut s'annuler) alors on peut affirmer que la fonction est strictement décroissante sur I ;*

▶ *Exemple :* Soit f la fonction dérivable sur $[-2\,;\,5]$ dont la courbe est donnée ci-dessous :



On peut en déduire le signe de la dérivée de f :

x	-2		-1		1		4		5
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

xm1math.net

3. Utilisation des dérivées pour étudier les variations d'une fonction

• Rappels sur les études de signe

signe de $ax+b$:

On détermine la valeur de x qui annule $ax+b$, puis on applique la règle : « signe de a après le 0 ».

x	$-\infty$		$-b/a$		$+\infty$
$ax+b$		signe de $(-a)$	0	signe de a	

signe de ax^2+bx+c $(a \neq 0)$:

On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ (sauf cas évidents)

• Si $\Delta < 0$, on applique la règle : « toujours du signe de a ».

x	$-\infty$		$+\infty$
ax^2+bx+c		signe de a	

• Si $\Delta = 0$, on calcule la racine double : $x_1 = -\dfrac{b}{2a}$.

On applique alors la règle : « toujours du signe de a et s'annule pour $x = x_1$ ».

x	$-\infty$		x_1		$+\infty$
ax^2+bx+c		signe de a	0	signe de a	

• Si $\Delta > 0$, on calcule les deux racines : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

On applique alors la règle : « signe de a à l'extérieur des racines ».

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
ax^2+bx+c		signe de a	0	signe de $(-a)$	0	signe de a	

(en supposant que $x_1 < x_2$)

3. Utilisation des dérivées pour étudier les variations d'une fonction

• Exemple d'étude des variations d'une fonction

Soit f définie sur $]2\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{x-2}$.

1. *Détermination les limites de f en 2 et en $+\infty$:*

   $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} x-2=0^+$, donc $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \dfrac{1}{x-2}=+\infty$. Et comme, $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} x^2-2x+1=1$, on a $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x)=+\infty$.

   f est une fonction rationnelle donc, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$.

2. *Étude des variations de f sur $]2\,;+\infty[$: $f'(x)=$* $\dfrac{(2x-2)\times(x-2)-(x^2-2x+1)\times 1}{(x-2)^2}$

   $=\dfrac{2x^2-4x-2x+4-x^2+2x-1}{(x-2)^2}=\dfrac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}$

   Signe de x^2-4x+3 : $\Delta=(-4)^2-4\times 1\times 3=4$

   du signe de $a=1$ à l'extérieur des racines $x_1=\dfrac{-(-4)-\sqrt{4}}{2}=1$ et $x_2=\dfrac{-(-4)+\sqrt{4}}{2}=3$

   On en déduit le tableau de variations (dans lequel on inclut les limites) :

x	2		3		$+\infty$
x^2-4x+3		$-$	0	$+$	
$(x-2)^2$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(3)=4$	$\nearrow$	$+\infty$

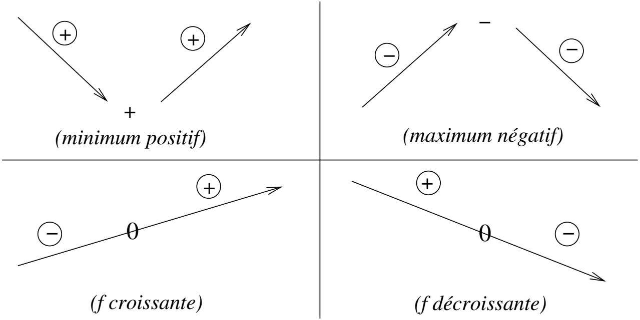
xm1math.net

3. Utilisation des dérivées pour étudier les variations d'une fonction

• Utilisation des variations d'une fonction pour déterminer son signe

Le tableau de variations d'une fonction peut servir à en déduire le signe de la fonction, ce qui peut permettre de déterminer le signe d'expressions qui ne sont ni du premier degré, ni du second degré.

Les quatre cas de base :



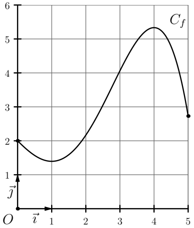
Ainsi, dans l'exemple précédent on a établi que f admettait 4 comme minimum sur $]2\,;+\infty[$.
On peut donc en déduire que $f(x)$ est toujours strictement positif sur $]2\,;+\infty[$.

4. Notion de continuité d'une fonction - Équation $f(x) = k$

Définition

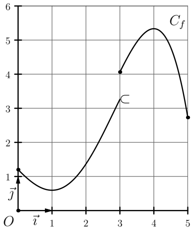
- Une fonction f est dite **continue en un point** a de son ensemble de définition si f a une limite en a et si cette limite est égale à $f(a)$.
- Si une fonction f est continue en tout point a d'un intervalle I alors f est dite **continue sur** I.
  Graphiquement, cela signifie que l'on peut tracer la courbe de f sur l'intervalle I d'un trait continu (sans lever le crayon).

Exemple 1 :



f est continue sur $[0\,;\,5]$

Exemple 2 :



f n'est pas continue en 3 et n'est pas continue sur $[0\,;\,5]$

f est continue sur $[3\,;\,5]$

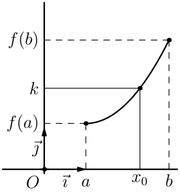
4. Notion de continuité d'une fonction - Équation $f(x) = k$

Propriété(s)

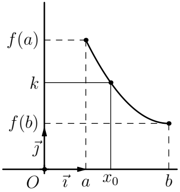
- *Toute fonction dérivable sur un intervalle I est alors forcément continue sur I (mais la réciproque n'est pas toujours vraie).*
- *Les fonctions polynômes et rationnelles, ainsi que la fonction racine carrée, sont continues sur leur ensemble de définition.*

Théorème de la valeur intermédiaire

*Si f est une fonction **continue** et **strictement croissante ou strictement décroissante** sur un intervalle $[a\,;\,b]$ et si k est un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$ alors on peut affirmer que l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution x_0 dans $[a\,;\,b]$.*



avec f strictement croissante



avec f strictement décroissante

xm1math.net

4. Notion de continuité d'une fonction - Équation $f(x) = k$

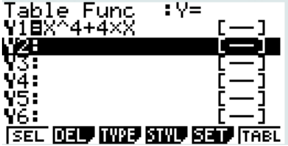
• Exemple d'utilisation du théorème de la valeur intermédiaire

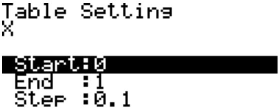
Soit f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = x^4 + 4x$.

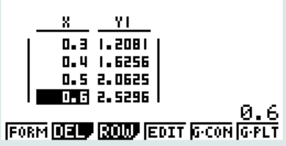
1. *Étude des variations de f :* $f'(x) = 4x^3 + 4$
   x étant positif, x^3 l'est aussi et $4x^3 + 4$ est strictement positif.
   Donc f est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

2. *Justification que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution x_0 dans* $[0\,;1]$ *:*
   On utilise le théorème de la valeur intermédiaire : f est continue et strictement croissante sur $[0\,;1]$. $f(0) = 0$ et $f(1) = 5$, donc 2 est bien compris entre ces deux valeurs. On peut en conclure que l'équation $f(x) = 2$ admet bien une unique solution dans $[0\,;1]$.

3. *Détermination d'une valeur approchée de la solution x_0 à* $0,1$ *près :*
   Pour cela, on utilise le menu TABLE de la calculatrice :







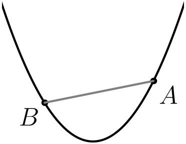
On voit que $f(x)$ franchit 2 pour x compris entre $0,4$ et $0,5$:
Une valeur approchée de x_0 à $0,1$ près par défaut est $0,4$.
Une valeur approchée de x_0 à $0,1$ près par excès est $0,5$.
Si on ne précise pas qu'on veut une valeur approchée par défaut ou excès, n'importe laquelle des deux convient.

5. Notion de convexité d'une fonction sur un intervalle

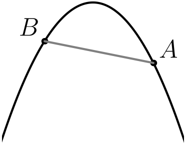
- **Cas général**

Définition

Une fonction est dite **convexe** sur un intervalle I lorsque pour tout points A et B de la courbe de f, le segment $[AB]$ est au dessus de la courbe entre A et B.



Une fonction est dite **concave** sur un intervalle I lorsque pour tout points A et B de la courbe de f, le segment $[AB]$ est en dessous de la courbe entre A et B.



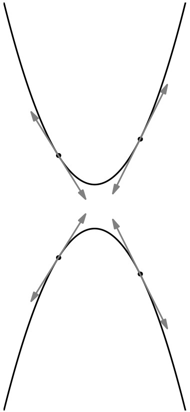
5. Notion de convexité d'une fonction sur un intervalle

- **Cas des fonctions dérivables**

Propriété(s)

*Une fonction dérivable est **convexe** sur un intervalle I si la courbe est entièrement située au dessus de chacune de ces tangentes.*

*Une fonction dérivable est **concave** sur un intervalle I si la courbe est entièrement située en dessous de chacune de ces tangentes.*



5. Notion de convexité d'une fonction sur un intervalle

• Critère de convexité pour les fonctions deux fois dérivables

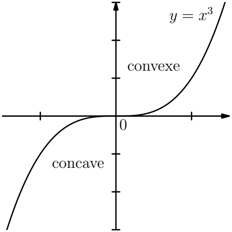
Propriété(s)

Étant donné une fonction f deux fois dérivable sur un intervalle I :

- *Si $f''(x)$ reste positif sur I alors on peut affirmer que f est convexe sur I.*
- *Si $f''(x)$ reste négatif sur I alors on peut affirmer que f est concave sur I.*

▶ *Exemple :*
Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$. On a $f'(x) = 3x^2$ et $f''(x) = 6x$. On en déduit que :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
signe de $f''(x)$	$-$	0	$+$
convexité de f	f concave		f convexe

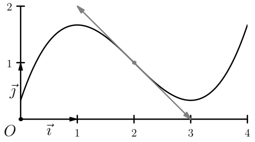


5. Notion de convexité d'une fonction sur un intervalle

• Point d'inflexion

Définition

Étant donné f une fonction dérivable sur un intervalle I contenant a.
On dit que la courbe de f admet un **point d'inflexion** au point d'abscisse a si f passe de concave à convexe ou de convexe à concave en ce point (la courbe « traverse » alors la tangente en ce point)



Propriété(s)

Si une fonction f est deux fois dérivable sur un intervalle I contenant a et si $f''(x)$ s'annule en changeant de signe pour $x = a$ alors la courbe de f admet un point d'inflexion au point d'abscisse a.

▶ *Exemple :* le tableau de signe de $f''(x)$ dans l'exemple précédent avec $f(x) = x^3$ montre que la courbe admet un point d'inflexion pour $x = 0$.

Fin du chapitre