

Complément sur la fonction exponentielle - Introduction au logarithme

► Exercice n°1

a) $e^{-8} \times e^5 = e^{-3}$ b) $e^{11x} \times e^{-4x} = e^{7x}$ c) $\frac{e^{-4}}{e^{-3}} = e^{-1}$ d) $\frac{e^{4x}}{e^{-7x}} \times e^{-6x} = e^{5x}$

► Exercice n°2

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + e^x = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3e^x = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} x - 3e^x = -\infty$
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} e^x = e^0 = 1$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$, donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} e^x \times \frac{1}{x} = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - \frac{1}{x} = 0$

► Exercice n°3

Dériver la fonction f dans les cas suivants :

- $f'(x) = 1 \times e^x + x \times e^x = (1+x)e^x$
- $f'(x) = \frac{2x \times e^x - x^2 \times e^x}{(e^x)^2} = \frac{(2x - x^2) \times e^x}{(e^x)^2} = \frac{2x - x^2}{e^x}$
- $f'(x) = -2x \times e^x + (1 - x^2) \times e^x = (-2x + 1 - x^2)e^x$
- $f'(x) = -\frac{e^x}{(3 + e^x)^2}$
- $f'(x) = 2 \times (-e^x)(1 - e^x) = -2e^x(1 - e^x)$

► Exercice n°4

- $e^{x+2} = 1 \Leftrightarrow e^{x+2} = e^0 \Leftrightarrow x+2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$. $S = \{-2\}$.
- $e^x + 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = -1$. Impossible. $S = \emptyset$
- $e^{x^2-x-11} = e \Leftrightarrow e^{x^2-x-11} = e^1 \Leftrightarrow x^2 - x - 11 = 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 12 = 0$.
 $\Delta = 49$; $x_1 = -3$; $x_2 = 4$. $S = \{-3; 4\}$.
- $e^{-x} - 1 < 0 \Leftrightarrow e^{-x} < 1 \Leftrightarrow e^{-x} < e^0 \Leftrightarrow -x < 0 \Leftrightarrow x > 0$. $S =]0; +\infty[$.

► Exercice n°5

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
- $f'(x) = 2 \times e^x + 2x \times e^x = (2x + 2)e^x$.

| | | | |
|---------|--------------|------------|-----------|
| x | -10 | -1 | $+\infty$ |
| $2x+2$ | - | 0 | + |
| e^x | + | + | + |
| $f'(x)$ | - | 0 | + |
| $f(x)$ | $-20e^{-10}$ | $-2e^{-1}$ | $+\infty$ |

► Exercice n°6

- $f'(x) = -4e^{-4x}$
- $f'(x) = 2xe^{x^2+3}$
- $f'(x) = -\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{1-\frac{1}{x}} = \frac{1}{x^2}e^{1-\frac{1}{x}}$
- $f'(x) = \frac{3 \times (x+1) - 3x \times 1}{(x+1)^2} e^{\frac{3x}{x+1}} = \frac{3}{(x+1)^2} e^{\frac{3x}{x+1}}$

► Exercice n°7

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty$ et $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} -2x = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x} = +\infty$.
Comme d'autre part, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$, on a $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x} + \frac{1}{x} = +\infty$
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x^2} = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty$, donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} e^{\frac{1}{x^2}} = +\infty$

► Exercice n°8

- On a $g(0) = Ae^0 = A$.
- a) $g(10) \approx 1,70$.
- b) $g'(t) = 2 \times (-0,016)e^{-0,016t} = -0,032e^{-0,016t}$ qui est toujours strictement négatif, car un exponentiel est toujours strictement positif.
- c) $\lim_{t \rightarrow +\infty} -0,016t = -\infty$ et $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$, donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = 0$.

► **Exercice n°9**

Compléter les équivalences suivantes :

- $e^x = 7 \Leftrightarrow x = \ln 7$
- $e^x = 0,01 \Leftrightarrow x = \ln(0,01)$
- $e^{-x} = 0,9 \Leftrightarrow -x = \ln(0,9) \Leftrightarrow x = -\ln(0,9)$
- $e^{-2x} = 3 \Leftrightarrow -2x = \ln 3 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \ln 3$

► **Exercice n°10**

$$A = e^{\ln 7} = 7$$

$$B = e^{-\ln 5} = \frac{1}{e^{\ln 5}} = \frac{1}{5}$$

$$C = e^{3 \ln 4} = (e^{\ln 4})^3 = 4^3 = 64$$

$$D = e^{\ln 5 + \ln 4} = e^{\ln 5} \times e^{\ln 4} = 5 \times 4 = 20$$

$$E = e^{-2 \ln 7} = \frac{1}{e^{2 \ln 7}} = \frac{1}{(e^{\ln 7})^2} = \frac{1}{7^2} = \frac{1}{49}$$

► **Exercice n°11**

- $e^x = 3 \Leftrightarrow x = \ln 3. S = \{\ln 3\}.$
- $e^{x+3} = 5 \Leftrightarrow x + 3 = \ln 5 \Leftrightarrow x = -3 + \ln 5. S = \{-3 + \ln 5\}.$
- $3e^{-x} - 9 = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = 3 \Leftrightarrow -x = \ln 3 \Leftrightarrow x = -\ln 3. S = \{-\ln 3\}.$
- $e^x \geq 7 \Leftrightarrow x \geq \ln 7. S = [\ln 7; +\infty[.$
- $8 - 2e^x \geq 0 \Leftrightarrow 4 \geq e^x \Leftrightarrow \ln 4 \geq x. S =]-\infty; \ln 4].$

► **Exercice n°12**

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x = -\infty$ et $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0$.
Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} 4e^x = 0$, on a $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2e^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - 2 = +\infty$.
On en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
- La droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale à C_f en $-\infty$.
- a) $e^x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 2 \Leftrightarrow x \geq \ln 2. S = [\ln 2; +\infty[.$
b) $f'(x) = 2e^{2x} - 4e^x = 2e^x(e^x - 2).$
c)

| | | | |
|-----------|-----------|---------|-----------|
| x | $-\infty$ | $\ln 2$ | $+\infty$ |
| $2e^x$ | + | | + |
| $e^x - 2$ | - | 0 | + |
| $f'(x)$ | - | 0 | + |
| $f(x)$ | 0 | | $+\infty$ |

$$f(\ln 2) = e^{2 \ln 2} - 4e^{\ln 2} = (e^{\ln 2})^2 - 4 \times 2 = 2^2 - 8 = -4$$

► **Exercice n°13**

Un solide dont la température à l'instant $t = 0$ est de 25 C est placé à l'extérieur, où la température est de 8 C. La température de ce corps (en degré celsius) à l'instant t (en secondes) est donné par $\theta(t) = 8 + 17e^{kt}$ où k est une constante réelle.

- On doit avoir $\theta(120) = 20 \Leftrightarrow 8 + 17e^{120k} = 20 \Leftrightarrow e^{120k} = \frac{12}{17}$
 $\Leftrightarrow 120k = \ln\left(\frac{12}{17}\right) \Leftrightarrow k = \frac{1}{120} \times \ln\left(\frac{12}{17}\right) \approx -0,0029$
- On cherche t tel que $8 + 17e^{-0,0029t} = 15 \Leftrightarrow e^{-0,0029t} = \frac{7}{17}$
 $\Leftrightarrow -0,0029t = \ln\left(\frac{7}{17}\right) \Leftrightarrow t = \frac{-1}{0,0029} \times \ln\left(\frac{7}{17}\right) \approx 306$ secondes.

► **Exercice n°14**

- On cherche k tel que $1000 e^{-k \times 1} = 937 \Leftrightarrow e^{-k} = \frac{937}{1000} \Leftrightarrow -k = \ln(0,937)$
 $\Leftrightarrow k = -\ln(0,937) \approx -0,065.$
- Cela revient à chercher t_1 tel que $N(t_1) = 500 \Leftrightarrow 1000 e^{-0,065t_1} = 500$
 $\Leftrightarrow e^{-0,065t_1} = 0,5 \Leftrightarrow -0,065t_1 = \ln(0,5) \Leftrightarrow t_1 = \frac{\ln(0,5)}{-0,065} \approx 10,7$ heures.
- Cela revient à chercher t_2 tel que $N(t_1 + t_2) = 250 \Leftrightarrow 1000 e^{-0,065(t_1+t_2)} = 250$
 $\Leftrightarrow 1000 e^{-0,065t_1 - 0,065t_2} = 250 \Leftrightarrow 1000 e^{-0,065t_1} \times e^{-0,065t_2} = 250$
Or, $1000 e^{-0,065t_1} = 500$. On cherche donc t_2 tel que $500 \times e^{-0,065t_2} = 250$
 $\Leftrightarrow e^{-0,065t_2} = 0,5$. On a donc $t_2 = t_1 \approx 10,7$ heures.

► **Exercice n°15**

- $f(0) = 10e^0 = 10.$
- Non, car un exponentiel est toujours strictement positif. De plus $20t + 10$ reste positif car $t \geq 0$.

$$3. f'(t) = 20 \times e^{-0,5t} + (20t + 10)(-0,5e^{-0,5t}) = 20e^{-0,5t} - 10te^{-0,5t} - 5e^{-0,5t} = (15 - 10t)e^{-0,5t}$$

| | | | |
|-------------|----|---------------|-----------|
| t | 0 | 1,5 | $+\infty$ |
| $15 - 10t$ | + | 0 | - |
| $e^{-0,5t}$ | + | | + |
| $f'(t)$ | + | 0 | - |
| $f(t)$ | 10 | $40e^{-0,75}$ | |

► **Exercice n°16**

$$1. f'(x) = 50e^{-0,5x+1} + 50x(-0,5e^{-0,5x+1}) = 50e^{-0,5x+1} - 25xe^{-0,5x+1} = (50 - 25x)e^{-0,5x+1}$$

| | | | |
|---------------|---|-----|-----------|
| x | 0 | 2 | $+\infty$ |
| $50 - 25x$ | + | 0 | - |
| $e^{-0,5x+1}$ | + | | + |
| $f'(x)$ | + | 0 | - |
| $f(x)$ | 0 | 100 | |

Le taux d'hydratation sera maximal au bout de 2 heures.

- f est continue et strictement croissante sur $[0; 1]$ et 50 est bien compris entre $f(0) = 0$ et $f(1) \approx 82,4$.
 - f est continue et strictement décroissante sur $[5; 5,5]$ et 50 est bien compris entre $f(5) \approx 55,8$ et $f(5,5) \approx 47,8$.
- Non, car d'après la question précédente le taux d'hydratation dépassera 50% sur un intervalle d'amplitude nécessairement inférieure à 5,5 heures.

► **Exercice n°17**

$$1. 1 - e^{-0,39x} > 0 \Leftrightarrow 1 > e^{-0,39x} \Leftrightarrow e^0 > e^{-0,39x} \Leftrightarrow 0 > -0,39x \Leftrightarrow x > 0.$$

$$S =]0; +\infty[.$$

- sur 10 ans : 4082,64 euros car $f(10) \approx 4,08264$
 - sur 15 ans : 4011,55 euros car $f(15) \approx 4,01155$

$$b) f'(t) = 4 \times \left(\frac{-(-(-0,39e^{-0,39t}))}{(1 - e^{-0,39t})^2} \right) = \frac{-1,56e^{-0,39t}}{(1 - e^{-0,39t})^2}.$$

Le carré et l'exponentiel restant positif, $f'(t)$ reste négative sur $[1; +\infty[$.

- Pour tout $t \geq 1$:

$$f(t) - 4 = \frac{4 - 4(1 - e^{-0,39t})}{1 - e^{-0,39t}} = \frac{4e^{-0,39t}}{1 - e^{-0,39t}}.$$

Le numérateur est positif à cause de l'exponentiel et le dénominateur est aussi positif d'après la question 1. On peut en conclure que $f(t) - 4$ reste toujours positif et donc que $f(t)$ est toujours supérieur à 4 milliers d'euros.