

## Dérivation, continuité et convexité

### ► Exercice n°1

1)  $f'(x) = 2x - 3$

2)  $f'(x) = \frac{1}{2}(6x - 4) = 3x - 2$

3)  $f'(x) = 3 \times \frac{(-1)}{(x+2)^2} = \frac{-3}{(x+2)^2}$

4)  $f'(x) = \frac{2(-x+6) - (2x-1)(-1)}{(-x+6)^2} = \frac{11}{(-x+6)^2}$

7)  $f'(x) = \frac{1(x^2+2) - (x-1)(2x)}{(x^2+2)^2} = \frac{-x^2+2x+2}{(x^2+2)^2}$

8)  $f'(x) = 1 \times \sqrt{x} + (x+3) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{x+3}{2\sqrt{x}}$

9)  $f'(x) = 2 \times 3 \times (3x-1) = 6 \times (3x-1)$

10)  $f'(x) = 4 \times \frac{1}{2\sqrt{4x+8}} = \frac{2}{\sqrt{4x+8}}$

11)  $f'(x) = \frac{1}{2} \times 3 \times \left(\frac{1}{2}x + 4\right)^2 = \frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{2}x + 4\right)^2$

### ► Exercice n°2

1)  $f(x) = -x^2 + 6x - 8 \quad a = -1 :$

$f(-1) = -15; f'(x) = -2x + 6; f'(-1) = 8$

$y = -15 + 8(x - (-1)) \Leftrightarrow y = 8x - 7$

2)  $f(x) = \frac{2x+1}{x-3} \quad a = 4 :$

$f(4) = 9; f'(x) = \frac{2 \times (x-3) - (2x+1) \times 1}{(x-3)^2} = \frac{-7}{(x-3)^2}; f'(4) = -7$

$y = 9 - 7(x - 4) \Leftrightarrow y = -7x + 37$

### ► Exercice n°3

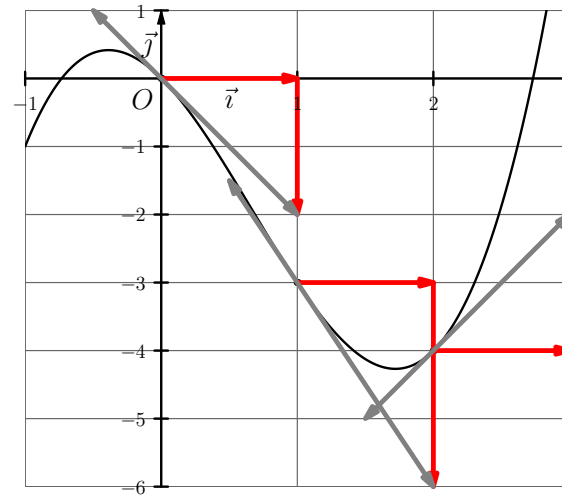
1.  $f'(2) =$  coefficient directeur de la tangente en  $A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0 - (-2)}{4 - 2} = 1.$

2.  $f'(4) =$  coefficient directeur de la tangente en  $C = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \frac{4 - 3}{6 - 4} = \frac{1}{2}.$

3.  $f'(6) =$  coefficient directeur de la tangente en  $E = \frac{y_F - y_E}{x_F - x_E} = \frac{-2 - 0}{7 - 6} = -2.$

### ► Exercice n°4

On a  $f'(x) = 3x^2 - 4x - 2; f'(0) = -2; f'(0) = -3$  et  $f'(2) = 2$



### ► Exercice n°5

On a  $f'(x) = \frac{(-2x+2) \times x - (-x^2+2x-1) \times 1}{x^2} = \frac{1-x^2}{x^2}$  et le coefficient directeur d'une tangente est égal à la valeur de la dérivée.

a) tangente horizontale  $\Leftrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$  ou  $x = -1$ .  
Les points de la courbe d'abscisse 1 et -1 conviennent.

b) coefficient directeur de la tangente  $= -2 \Leftrightarrow f'(x) = -2 \Leftrightarrow \frac{1-x^2}{x^2} = -2 \Leftrightarrow 1 - x^2 = -2x^2$  ( $x \neq 0$ )  $\Leftrightarrow x^2 = -1$ . Impossible.  
Aucun point de la courbe ne peut convenir.

c) tangente parallèle à la droite d'équation  $y = -\frac{2}{3}x - 5 \Leftrightarrow$  coefficient directeur de la tangente  $=$  coefficient directeur de la droite d'équation  $y = -\frac{2}{3}x - 5$

$$\Leftrightarrow f'(x) = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{1-x^2}{x^2} = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow 3 - 3x^2 = -2x^2 \quad (x \neq 0) \Leftrightarrow x^2 = 3$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{3} \text{ ou } x = -\sqrt{3}.$$

Les points de la courbe d'abscisse  $\sqrt{3}$  et  $-\sqrt{3}$  conviennent.

► **Exercice n°6**

D'après la courbe de la dérivée, on a :

|                  |   |   |   |   |   |
|------------------|---|---|---|---|---|
| $x$              | 0 | 1 | 3 | 4 |   |
| signe de $f'(x)$ | + | 0 | - | 0 | + |

Donc, la fonction  $f$  doit-être :

- croissante de 0 à 1 ;
- décroissante de 1 à 3 ;
- croissante de 3 à 4.

Seule la figure 3 peut correspondre.

► **Exercice n°7**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ .

1.  $f$  est rationnelle.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 = 1$

De même,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1$

La droite d'équation  $y = 1$  est une asymptote horizontale à la courbe en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .

2.  $f'(x) = \frac{2x(x^2 + 1) - (x^2 - 1)(2x)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}$ .

|               |           |    |           |
|---------------|-----------|----|-----------|
| $x$           | $-\infty$ | 0  | $+\infty$ |
| $4x$          | -         | 0  | +         |
| $(x^2 + 1)^2$ | +         |    | +         |
| $f'(x)$       | -         | 0  | +         |
| $f(x)$        | 1         |    | 1         |
|               |           | -1 |           |

► **Exercice n°8**

1.  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} 2x - 1 = 0^+$ , donc  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{1}{2x - 1} = +\infty$ . Et comme  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} 2x^2 - x + 2 = 2$ , on

a  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} (2x^2 - x + 2) \times \frac{1}{2x - 1} = +\infty$

La droite d'équation  $x = \frac{1}{2}$  est une asymptote verticale à la courbe.

$f$  étant rationnelle,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ .

Il n'y a pas d'asymptote horizontale à la courbe.

2.  $f'(x) = \frac{(4x - 1) \times (2x - 1) - (2x^2 - x + 2) \times 2}{(2x - 1)^2}$   
 $= \frac{8x^2 - 4x - 2x + 1 - 4x^2 + 2x - 4}{(2x - 1)^2} = \frac{4x^2 - 4x - 3}{(2x - 1)^2}$ .

Signe de  $4x^2 - 4x - 3$  :  $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 4 \times (-3) = 64$ .

Du signe de  $a = 4$  à l'extérieur des racines qui sont égales à  $\frac{4 - 8}{8} = -\frac{1}{2}$  et

$\frac{4 + 8}{8} = \frac{3}{2}$ .

|                 |               |               |           |
|-----------------|---------------|---------------|-----------|
| $x$             | $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{2}$ | $+\infty$ |
| $4x^2 - 4x - 3$ | -             | 0             | +         |
| $(2x - 1)^2$    | +             |               | +         |
| $f'(x)$         | -             | 0             | +         |
| $f(x)$          | $+\infty$     |               | $+\infty$ |
|                 |               | $\frac{5}{2}$ |           |

► **Exercice n°9**

Dans une population donnée, on note  $x$  la proportion de personnes atteintes de la grippe (on a donc  $x \in [0; 1[$ ).

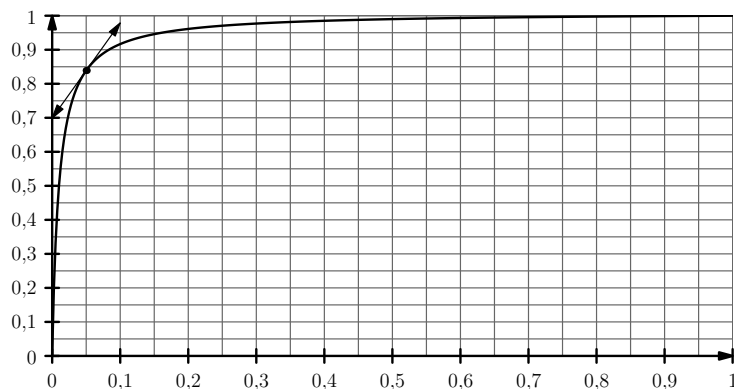
Un fabricant propose un test de dépistage et affirme qu'avec son test la probabilité d'avoir la grippe lorsque le test est positif est donnée par la fonction  $f$  définie sur  $[0; 1[$  par  $f(x) = \frac{99x}{98x + 1}$  où  $x$  est la proportion de personnes atteintes de la grippe.

1.  $f(0,01) = 0,5$ . L'affirmation est vraie.

2.  $f'(x) = \frac{99 \times (98x + 1) - 99x \times 98}{(98x + 1)^2} = \frac{99}{(98x + 1)^2} > 0$  sur  $[0; 1[$ .  $f$  est bien strictement croissante sur  $[0; 1[$ .

3. Cela revient à chercher les  $x$  dans  $[0; 1[$  tels que  $\frac{99x}{98x+1} > 0,9$   
 $\Leftrightarrow 99x > 0,9(98x+1)$  (car  $98x+1 > 0$ )  
 $\Leftrightarrow 99x > 88,2x + 0,9 \Leftrightarrow 10,8x > 0,9 \Leftrightarrow x > \frac{0,9}{10,8} \approx 0,083$ .

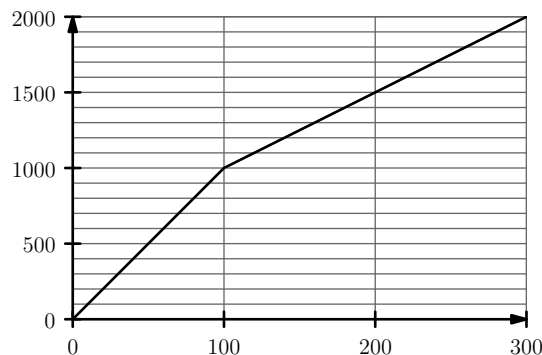
4. a)  $f'(0,05) \approx 2,8$



b) La dérivée ne pouvant pas s'annuler, la tangente à la courbe de  $f$  au point d'abscisse 1 ne peut pas être horizontale (ni aucune autre tangente d'ailleurs) ?

### ► Exercice n°10

- Pour les 100 premiers km, il faut payer  $100 \times 10 = 1000$  et pour les 100 derniers km, il faut déboursier  $100 \times 5 = 500$ .
- Si  $0 \leq x \leq 100$  alors  $f(x) = 10x$
  - Si  $100 < x$  alors  $f(x) = 1000 + 5(x - 100) = 5x + 500$
- 



$f$  est continue en 100 car  $5 \times 100 + 500 = 10 \times 100$ , donc  $f$  est continue sur  $[0; +\infty[$ .

### ► Exercice n°11

1.  $f$  est une fonction polynôme.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^3 = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^3 = -\infty.$$

2.  $f'(x) = -3x^2 + 18x - 24$ .  $\Delta = 18^2 - 4 \times (-3) \times (-24) = 36 > 0$ .

Du signe de  $a = -3$  à l'extérieur des racines qui sont égales à  $\frac{-18-6}{-6} = 4$  et  $\frac{-18+6}{-6} = 2$ .

|         |           |      |      |           |   |
|---------|-----------|------|------|-----------|---|
| $x$     | $-\infty$ | 2    | 4    | $+\infty$ |   |
| $f'(x)$ | -         | 0    | +    | 0         | - |
| $f(x)$  | $+\infty$ | $-8$ | $-4$ | $-\infty$ |   |

3. Cela revient à déterminer les  $x$  tels que  $f'(x) = -9 \Leftrightarrow -3x^2 + 18x - 15 = 0$ .

$$\Delta = 18^2 - 4 \times (-3) \times (-15) = 144. \text{ Racines : } \frac{-18-12}{-6} = 5 \text{ et } \frac{-18+12}{-6} = 1.$$

Les points d'abscisse 5 et 1 conviennent.

- a)  $f$  est continue et strictement décroissante sur  $[0; 1]$  et 0 est bien compris entre  $f(0) = 12$  et  $f(1) = -4$ , donc l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $x_0$  dans  $[0; 1]$ .  
 b) La calculatrice indique que  $0,6 < x_0 < 0,7$ , donc 0,6 est une valeur approchée par défaut de  $x_0$  à 0,1 près.
- a)  $f''(x) = -6x + 18$ .

b)

|                  |           |   |           |
|------------------|-----------|---|-----------|
| $x$              | $-\infty$ | 3 | $+\infty$ |
| $f''(x)$         | +         | 0 | -         |
| convexité de $f$ | convexe   |   | concave   |

c) D'après le tableau ci-dessus,  $f''$  s'annule en changeant de signe pour  $x = 3$ . Donc le point  $I$  d'abscisse 3 et d'ordonnée  $f(3) = -6$  est un point d'inflexion.

d)  $y = f(3) + f'(3)(x - 3) \Leftrightarrow y = -6 + 3(x - 3) \Leftrightarrow y = 3x - 15$

► **Exercice n°12**

1.  $C'(x) = 3x^2 - 24x + 72$ , donc  $C''(x) = 6x - 24$ .

|                  |         |   |         |
|------------------|---------|---|---------|
| $x$              | 0       | 4 | 10      |
| $C''(x)$         | -       | 0 | +       |
| convexité de $C$ | concave |   | convexe |

2. • Quand la fonction « coût total »  $C$  est convexe sur un intervalle alors la fonction « coût marginal »  $C'$  est *croissante* sur cet intervalle.  
• Quand la fonction « coût total »  $C$  est concave sur un intervalle alors la fonction « coût marginal »  $C'$  est *decroissante* sur cet intervalle.