Kit de survie : Bac STL-SPCL STI2D

1) Inégalités - Étude du signe d'une expression

a) Opérations sur les inégalités

Pour tout a :	$x<y \Leftrightarrow x+a<y+a$	*même sens*
Pour tout $k>0$:	$x<y \Rightarrow kx<ky$	*même sens*
Pour tout $k<0$:	$x<y \Rightarrow kx>ky$	*sens contraire*
Pour x et y de même signe :	$x<y \Rightarrow \dfrac{1}{x}>\dfrac{1}{y}$	*sens contraire*
Pour $x>0$ et $y>0$:	$x<y \Rightarrow x^2<y^2$	*même sens*
Pour $x>0$ et $y>0$:	$x<y \Rightarrow \sqrt{x}<\sqrt{y}$	*même sens*
Si f croissante * :	$x<y \Rightarrow f(x)\leqslant f(y)$	*même sens*
Si f décroissante * :	$x<y \Rightarrow f(x)\geqslant f(y)$	*sens contraire*

(* sur un intervalle contenant x et y)

► *Exemple :*

• Sachant que $3<x<5$, que peut-on en conclure pour $\dfrac{1}{3-x}$?

$3<x<5 \Rightarrow -5<-x<-3 \Rightarrow -2<3-x<0 \Rightarrow \dfrac{1}{3-x}<-\dfrac{1}{2}$

b) Inégalités classiques

Pour tout x : $-1\leqslant \cos x\leqslant 1$; $-1\leqslant \sin x\leqslant 1$.

c) Signe de $ax+b$ $(a\neq 0)$

On détermine la valeur de x qui annule $ax+b$, puis on applique la règle : « signe de a après le 0 ».

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		signe de $(-a)$	0	signe de a	

d) Signe de ax^2+bx+c $(a\neq 0)$

On calcule la discriminant $\Delta=b^2-4ac$ (sauf cas évidents)

• Si $\Delta<0$, on applique la règle : « toujours du signe de a ».

x	$-\infty$		$+\infty$
ax^2+bx+c		signe de a	

• Si $\Delta=0$, on calcule la racine double : $x_1=-\dfrac{b}{2a}$.

On applique alors la règle : « toujours du signe de a et s'annule pour $x=x_1$ ».

x	$-\infty$		x_1		$+\infty$
ax^2+bx+c		signe de a	0	signe de a	

• Si $\Delta>0$, on calcule les deux racines : $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

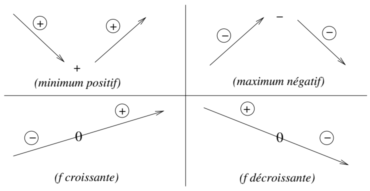
On applique alors la règle : « signe de a à l'extérieur des racines ».

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
ax^2+bx+c		signe de a	0	signe de $(-a)$	0	signe de a	

(on suppose que $x_1<x_2$)

e) Utilisation des variations d'une fonction pour déterminer son signe

Les cas les plus classiques :



2) Étude de fonction

a) Limites

• Limite d'une somme :

$\underbrace{(\ \ )}_{\to l}+\underbrace{(\ \ )}_{\to l'} \to l+l'$	$\underbrace{(\ \ )}_{\to l}+\underbrace{(\ \ )}_{\to +\infty} \to +\infty$	$\underbrace{(\ \ )}_{\to l}+\underbrace{(\ \ )}_{\to -\infty} \to -\infty$
$\underbrace{(\ \ )}_{\to +\infty}+\underbrace{(\ \ )}_{\to +\infty} \to +\infty$	$\underbrace{(\ \ )}_{\to -\infty}+\underbrace{(\ \ )}_{\to -\infty} \to -\infty$	

• Limite d'un produit :

$\underbrace{(\ \ )}_{\to l}\times\underbrace{(\ \ )}_{\to l'} \to l\times l'$	$\underbrace{(\ \ )}_{\to l>0}\times\underbrace{(\ \ )}_{\to +\infty} \to +\infty$	$\underbrace{(\ \ )}_{\to l<0}\times\underbrace{(\ \ )}_{\to +\infty} \to -\infty$
$\underbrace{(\ \ )}_{\to l>0}\times\underbrace{(\ \ )}_{\to -\infty} \to -\infty$	$\underbrace{(\ \ )}_{\to l<0}\times\underbrace{(\ \ )}_{\to -\infty} \to +\infty$	$\underbrace{(\ \ )}_{\to +\infty}\times\underbrace{(\ \ )}_{\to +\infty} \to +\infty$
$\underbrace{(\ \ )}_{\to -\infty}\times\underbrace{(\ \ )}_{\to -\infty} \to +\infty$	$\underbrace{(\ \ )}_{\to -\infty}\times\underbrace{(\ \ )}_{\to +\infty} \to -\infty$	

• Limite de l'inverse :

$\left(\dfrac{1}{\underbrace{(\ \ )}_{\to l\neq 0}}\right) \to \frac{1}{l}$	$\left(\dfrac{1}{\underbrace{(\ \ )}_{\to \pm\infty}}\right) \to 0$	$\left(\dfrac{1}{\underbrace{(\ \ )}_{\to 0^+}}\right) \to +\infty$	$\left(\dfrac{1}{\underbrace{(\ \ )}_{\to 0^-}}\right) \to -\infty$

• Limite d'un quotient :

Pour les quotients (autres que les fonctions rationnelles en $\pm\infty$), on « sépare la fraction » : $\dfrac{(\ \ )}{(\ \ )} = (\ \ )\times\dfrac{1}{(\ \ )}$

• Formes indéterminées :

Les deux cas de forme indéterminée sont : $\underbrace{(\ \ )}_{\to +\infty}+\underbrace{(\ \ )}_{\to -\infty}$; $\underbrace{(\ \ )}_{\to \pm\infty}\times\underbrace{(\ \ )}_{\to 0}$

• Polynômes et fonctions rationnelles en $\pm\infty$:

• En $\pm\infty$, la limite d'une fonction polynome est égale à la limite de son terme de plus haut degré.
• En $\pm\infty$, la limite d'une fonction rationnelle est égale à la limite du quotient des termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur *(ne pas oublier de simplifier le quotient des termes de plus haut degré avant de déterminer la limite).*

b) Asymptotes

• Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ alors la droite d'équation $x=a$ est une asymptote verticale à C_f.
• Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = b$ alors la droite d'équation $y=b$ est une asymptote horizontale à C_f en $\pm\infty$.

c) Position relative de deux courbes

Pour déterminer la position relative entre deux courbes C_f et C_g, on étudie le signe de $f(x)-g(x)$ (méthode aussi valable pour les asymptotes horizontales) :
• si $f(x)-g(x)\geqslant 0$ pour tout x d'un intervalle I, alors C_f est située au dessus de C_g sur I.
• si $f(x)-g(x)\leqslant 0$ pour tout x d'un intervalle I, alors C_f est située en dessous de C_g sur I.

d) Dérivation

• Dérivées des fonctions usuelles :

$f(x)=a \Rightarrow f'(x)=0$	$f(x)=ax+b \Rightarrow f'(x)=a$	$f(x)=x \Rightarrow f'(x)=1$
$f(x)=x^2 \Rightarrow f'(x)=2x$	$f(x)=x^3 \Rightarrow f'(x)=3x^2$	$f(x)=\dfrac{1}{x} \Rightarrow f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$
$f(x)=\dfrac{1}{x^2} \Rightarrow f'(x)=-\dfrac{2}{x^3}$	$f(x)=\dfrac{1}{x^3} \Rightarrow f'(x)=-\dfrac{3}{x^4}$	$f(x)=\sqrt{x} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x)=\cos x \Rightarrow f'(x)=-\sin x$	$f(x)=\sin x \Rightarrow f'(x)=\cos x$	

• Opérations sur les fonctions dérivables :

Fonction	Fonction dérivée
$f+g$	$f'+g'$
$k\,f \quad (k \text{ réel})$	$k\,f'$
$f\,g$	$f'\,g+f\,g'$

Fonction	Fonction dérivée
f^2	$2\,f'\,f$
$\dfrac{1}{f}$	$-\dfrac{f'}{f^2}$
$\dfrac{f}{g}$	$\dfrac{f'\,g-f\,g'}{g^2}$

e) Tangente

• Si f est dérivable en a alors une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse a est : $y=f(a)+f'(a)(x-a)$ (le coefficient directeur de la tangente est égale à la valeur de la dérivée)
• Pour déterminer les abscisses des éventuels points de C_f où la tangente admet un coefficient directeur égal à m, il suffit de résoudre l'équation $f'(x)=m$.

3) Primitives

• F est une primitive de f sur un intervalle I si F est dérivable sur I et si pour tout x de I, $F'(x)=f(x)$.
• Si F_0 est une primitive de f sur intervalle I alors toutes les primitives de f sur I sont de la forme $F(x)=F_0(x)+C$ où C est une constante réelle.
• Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

• Primitives des fonctions usuelles : *(F représente une primitive de f)*

$f(x)=a \Rightarrow F(x)=ax$	$f(x)=x \Rightarrow F(x)=\dfrac{x^2}{2}$
$f(x)=x^2 \Rightarrow F(x)=\dfrac{x^3}{3}$	$f(x)=x^3 \Rightarrow F(x)=\dfrac{x^4}{4}$
$f(x)=\dfrac{1}{x^2} \Rightarrow F(x)=-\dfrac{1}{x}$	$f(x)=\dfrac{1}{x^3} \Rightarrow F(x)=-\dfrac{1}{2x^2}$
$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow F(x)=2\sqrt{x}$	
$f(x)=\sin x \Rightarrow F(x)=-\cos x$	$f(x)=\cos x \Rightarrow F(x)=\sin x$

• Formules générales :

forme de f	une primitive de f	exemples
$U'\,U$	$\dfrac{U^2}{2}$	$f(x)=\cos x\times\sin x \Rightarrow F(x)=\dfrac{(\sin x)^2}{2}$
$U'\,U^2$	$\dfrac{U^3}{3}$	$f(x)=4(4x+1)^2 \Rightarrow F(x)=\dfrac{(4x+1)^3}{3}$
$\dfrac{U'}{U^2} \quad (U(x)\neq 0))$	$\dfrac{-1}{U}$	$f(x)=\dfrac{3x^2}{(x^3+1)^2} \Rightarrow F(x)=\dfrac{-1}{x^3+1}$
$\dfrac{U'}{U^3} \quad (U(x)\neq 0))$	$\dfrac{-1}{2U^2}$	$f(x)=\dfrac{7}{(7x+1)^3} \Rightarrow F(x)=\dfrac{-1}{2(7x+1)^2}$

• Recherche pratique d'une primitive :
Pour les fonctions usuelles, on utilise directement les formules.
Pour autres fonctions, il faut d'abord identifier la forme qui ressemble le plus à la fonction. Si on a la forme exacte, on utilise directement la formule correspondante.
Dans le cas contraire, on écrit la forme exacte qu'il faudrait pour la fonction f et on rectifie en multipliant par le coefficient adéquat.

▶ *Exemple :* Soit f définie sur $]-2\,;\,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{(3x+6)^2}$.

On pense à la forme $\dfrac{U'}{U^2}$ (dont une primitive est $\dfrac{-1}{U}$) . On écrit que $f(x)=\dfrac{1}{3}\times\underbrace{\dfrac{3}{(3x+6)^2}}_{\text{forme exacte}}$.

Une primitive de f sur $]-2\,;\,+\infty[$ est donc F définie par $F(x)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{-1}{(3x+6)}$.

4) Fonctions logarithme népérien et exponentielle

a) Existence

• $\ln x$ n'existe que si $x>0$; e^x existe pour tout réel x.

▶ *Exemple :*
La fonction f définie par $f(x)=\ln(x-1)$ n'est définie que sur $]1\,;\,+\infty[$ car il faut que $x-1$ soit strictement positif.

b) Lien entre $\ln x$ et e^x

• $y=e^x \Leftrightarrow \ln y = x$; $\ln(\mathrm{e}^x)=x$; $\mathrm{e}^{\ln x}=x$ (pour $x>0$)

c) Valeurs particulières

• $\ln 1=0$; $\ln \mathrm{e}=1$; $\mathrm{e}^0=1$; $\mathrm{e}^1=\mathrm{e}$; $\mathrm{e}^{-1}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$

d) Propriétés algébriques

Si $a>0$ et $b>0$:
$\ln(ab)=\ln a+\ln b$; $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right)=-\ln a$; $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right)=\ln a-\ln b$
Pour tout entier n, $\ln(a^n)=n\ln a$; $\ln\sqrt{a}=\dfrac{1}{2}\ln a$

Pour tous réels a et b :
$\mathrm{e}^a\times\mathrm{e}^b=\mathrm{e}^{a+b}$; $\dfrac{1}{\mathrm{e}^a}=\mathrm{e}^{-a}$; $\dfrac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b}=\mathrm{e}^{a-b}$; Pour tout $n\in\mathbb{Z}$, $(\mathrm{e}^a)^n=\mathrm{e}^{an}$

▶ *Exemples :*
Si $x>0$, $\ln\left(\dfrac{1}{x^2}\right)=-\ln(x^2)=-2\ln x$
Pour tout x, $(\mathrm{e}^{-x})^2\times\mathrm{e}^{3x}=\mathrm{e}^{-2x}\times\mathrm{e}^{3x}=\mathrm{e}^x$

e) Signe de $\ln x$ et de e^x

• **Signe de $\ln x$:**
Si $0<x<1$ alors $\ln x$ est strictement négatif.
Si $x>1$ alors $\ln x$ est strictement positif.
$\ln 1=0$.

• **Signe de e^x :** pour tout réel x, e^x est strictement positif.

f) Équations et inéquations

• Si $a>0$ et $b>0$:
$\ln a=\ln b\Leftrightarrow a=b$; $\ln a<\ln b\Leftrightarrow a<b$; $\ln a\leqslant\ln b\Leftrightarrow a\leqslant b$

• $\mathrm{e}^a=\mathrm{e}^b\Leftrightarrow a=b$; $\mathrm{e}^a<\mathrm{e}^b\Leftrightarrow a<b$; $\mathrm{e}^a\leqslant\mathrm{e}^b\Leftrightarrow a\leqslant b$

• $\ln x=a\Leftrightarrow x=\mathrm{e}^a$; $\ln x<a\Leftrightarrow 0<x<\mathrm{e}^a$; $\ln x>a\Leftrightarrow x>\mathrm{e}^a$

• Si $a>0$: $\mathrm{e}^x=a\Leftrightarrow x=\ln a$; $\mathrm{e}^x<a\Leftrightarrow x<\ln a$; $\mathrm{e}^x>a\Leftrightarrow x>\ln a$

► *Remarque :*
Pour les équations et inéquations avec logarithme, ne pas oublier de commencer par définir les conditions d'existence (les expressions contenues dans un logarithme doivent être strictement positives).

► *Exemples d'équations et d'inéquations :*

• $\ln x + \ln 2 = 5$. Condition d'existence : $x > 0$.
Avec cette condition :
$\ln x + \ln 2 = 5 \Leftrightarrow \ln(2x) = 5 \Leftrightarrow 2x = \mathrm{e}^5 \Leftrightarrow x = \dfrac{\mathrm{e}^5}{2}$. $\quad S = \left\{\dfrac{\mathrm{e}^5}{2}\right\}$

• $\ln(x+2) \leqslant 1$. Condition d'existence : $x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$.
Avec cette condition :
$\ln(x+2) \leqslant 1 \Leftrightarrow x + 2 \leqslant \mathrm{e} \Leftrightarrow x \leqslant \mathrm{e} - 2$. $\quad S =]-2; \mathrm{e}-2]$

• $\mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^x - 3 = 0 \Leftrightarrow X^2 - 2X - 3 = 0$ avec $X = \mathrm{e}^x$.
$\Delta = 16$; $\quad X = -1$ ou $X = 3$.
D'où, $\mathrm{e}^x = -1$ (impossible) ou $\mathrm{e}^x = 3 \Leftrightarrow x = \ln 3$. $\quad S = \{\ln 3\}$

• $\mathrm{e}^x < 5\mathrm{e}^{-x} \Leftrightarrow \mathrm{e}^x < \dfrac{5}{\mathrm{e}^x} \Leftrightarrow \mathrm{e}^{2x} < 5$ (car $\mathrm{e}^x > 0$) $\Leftrightarrow 2x < \ln 5 \Leftrightarrow x < \dfrac{\ln 5}{2}$. $\quad S = \left]-\infty; \dfrac{\ln 5}{2}\right[$.

g) Limites

Situation en $+\infty$:
• $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$
• Pour tout entier $n > 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0$; $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^n}{\ln x} = +\infty$
(on dit que x^n est plus fort que $\ln x$ en $+\infty$)
• $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$
• Pour tout entier $n > 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty$; $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^n}{\mathrm{e}^x} = 0$
(on dit que e^x est plus fort que x^n en $+\infty$: on en déduit que e^x est aussi plus fort que $\ln x$ en $+\infty$)

Méthode générale en cas de FI en $+\infty$: Mettre le plus fort en facteur en haut et en bas.
► *Exemples :*
• $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x - x = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\dfrac{\ln x}{x} - 1\right) = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$
• $\lim\limits_{x\to+\infty} 3\mathrm{e}^x - x^2 = \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x\left(3 - \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^x}\right) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$
• $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x + 1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} \times \dfrac{1}{(1 + \frac{1}{\mathrm{e}^x})} = 0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \dfrac{1}{\mathrm{e}^x} = 1$

Situation en 0 :
• $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \ln x = -\infty$
• Pour tout entier $n > 0$, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x^n \times \ln x = 0$

Méthode générale en cas de FI en 0 avec un logarithme : on essaie de faire apparaître $x^n \times \ln x$.
► *Exemple :*
$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \dfrac{1}{x} + \ln x = \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \dfrac{1}{x}(1 + x\ln x) = +\infty \quad$ car $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x\ln x = 0$

Situation en $-\infty$:
• $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$
• Pour tout entier $n > 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n \times \mathrm{e}^x = 0$

Méthode générale en cas de FI en $-\infty$ avec un exponentiel : on essaie de faire apparaître $x^n \times e^x$.
► *Exemple :* $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x\left(x^2 + 1\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2\mathrm{e}^x + e^x = 0$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2\mathrm{e}^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$

h) Dérivées et primitives

- $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$; $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$ $(u > 0)$
- $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$; $(\mathrm{e}^u)' = u'\mathrm{e}^u$

▶ *Exemples :*
$\left[\ln(x^2+1)\right]' = \dfrac{2x}{x^2+1}$; $[\mathrm{e}^{-x}]' = -\mathrm{e}^{-x}$

- Si $U > 0$, une primitive de $\dfrac{U'}{U}$ est $\ln U$.
- Une primitive de $U'\mathrm{e}^U$ est e^U.

▶ *Exemples :*
- Soit f définie sur $]2\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{4x-8}$. On écrit que $f(x) = \dfrac{1}{4} \times \underbrace{\dfrac{4}{4x-8}}_{\text{forme exacte } \frac{U'}{U}}$.

Une primitive de f sur $]2\,;\,+\infty[$ est donc F définie par $F(x) = \dfrac{1}{4}\ln(4x-8)$.

- Si $f(x) = e^{-x} = -\left(-e^{-x}\right)$ alors une primitive de f est définie par $F(x) = -e^{-x}$.

- Si $f(x) = e^{4x+5}$, on écrit que $f(x) = \dfrac{1}{4} \times \underbrace{\left(4e^{4x+5}\right)}_{\text{forme exacte } U'\mathrm{e}^U}$.

Une primitive de f est donc définie par $F(x) = \dfrac{1}{4}\,e^{4x+5}$.

5) Statistique

a) Séries statistiques simples

- **Moyenne, Variance et écart type d'une série statistique :**

(valeurs du caractère : x_i ; effectif : n_i ; effectif total : N)
Moyenne : $\bar{x} = \dfrac{n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + \cdots}{N}$
Variance $V(x) = \dfrac{n_1\,(x_1)^2 + n_2\,(x_2)^2 + n_3\,(x_3)^2 + \cdots}{N} - (\bar{x})^2$
Ecart type : $\sigma(x) = \sqrt{V(x)}$

▶ *Exemple :*

x_i	1	2	3	4	5
n_i	10	8	1	3	1

- $\bar{x} = \dfrac{10 \times 1 + 8 \times 2 + 1 \times 3 + 3 \times 4 + 1 \times 5}{10+8+1+3+5} = 2$
- $V(x) = \dfrac{10 \times 1^2 + 8 \times 2^2 + 1 \times 3^2 + 3 \times 4^2 + 1 \times 5^2}{10+8+1+3+5} - 2^2 = \dfrac{32}{23}$

$\sigma(x) = \sqrt{V(x)} \approx 1,18$

b) Séries statistiques doubles

Pour une série :

Caractère x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
Caractère y_i	y_1	y_2	$\cdots$	y_n

- **Point moyen** : $G\begin{pmatrix}\bar{x}\\ \bar{y}\end{pmatrix}$ ($\bar{x}$: moyenne des x_i ; $\bar{y}$: moyenne des y_i)
- **Droite des moindres carrés** : $y = ax + b$

les valeurs de a et b sont données directement par la calculatrice.
La droite des moindres carrés doit passer par le point moyen.

▶ *Exemple :*

x_i	1	2	3	4	5
y_i	8	9	12	12	14

• $\bar{x} = \dfrac{1+2+3+4+5}{5} = 3$; $\bar{y} = \dfrac{8+9+12+12+14}{5} = 11$; $G\begin{pmatrix} 3 \\ 11 \end{pmatrix}$

• Droite des moindres carrés : La calculatrice donne $a = 1,5$ et $b = 6,5$

TI :

Entrée des données : STAT $\longrightarrow$ Edit $\longrightarrow$ entrer les valeurs x_i dans L_1 et les valeurs y_i dans L_2

Calcul : STAT $\longrightarrow$ CALC $\longrightarrow$ LinReg(ax+b) L_1 , L_2

CASIO :

Entrée des données : STAT $\longrightarrow$ entrer les valeurs x_i dans la liste 1 et les valeurs y_i dans la liste 2

Vérification du mode de calcul : STAT $\longrightarrow$ CALC $\longrightarrow$ SET (par F6) $\longrightarrow$ List 1 doit être sélectionné dans 2VarXlist et List 2 doit être sélectionné dans 2VarYList

Calcul : STAT $\longrightarrow$ CALC $\longrightarrow$ REG $\longrightarrow$ X

Une équation de la droite des moindres carrés est donc : $y = 1,5x + 6,5$

• Estimation de la valeur de y pour $x = 7$: $y = 1,5 \times 7 + 6,5 = 17$

6) Calcul intégral

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Pour tous a et b de I :
$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f sur I.

▶ *Exemple :*

$$\int_0^{\ln 2} 3\,\mathrm{e}^{3x}\,dx = \left[\mathrm{e}^{3x}\right]_0^{\ln 2} = \mathrm{e}^{3\ln 2} - \mathrm{e}^0 = \mathrm{e}^{\ln(2^3)} - 1 = \mathrm{e}^{\ln(8)} - 1 = 8 - 1 = 7.$$

Calculs d'aires

• Si pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \geqslant 0$ alors l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est égale à $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ en **unités d'aire**.

• Si pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \leqslant g(x)$ alors l'aire de la partie du plan comprise entre les courbes de f et g et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est égale à $\displaystyle\int_a^b g(x) - f(x)\,dx$ en **unités d'aire**.

(« intégrale de la plus grande moins la plus petite »)

▶ *Remarques :*

• Pour avoir l'aire en cm^2, il faut multiplier le résultat en unités d'aire par :
(la valeur en cm d'une unité sur l'axe des abscisses) $\times$ (la valeur en cm d'une unité sur l'axe des ordonnées).

7) Suites

a) Suites géométriques

On passe d'un terme au terme suivant en multipliant toujours par le même nombre q appelé raison de la suite.

• Pour tout n : $U_{n+1} = q \times U_n$; $U_n = q^n \times U_0$; $U_n = q^{n-p} \times U_p$

• Si pour tout n, $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ = constante alors (U_n) est une suite géométrique de raison égale à la constante.

• $U_p + U_{p+1} + \cdots + U_n = U_p \times \dfrac{1 - q^{n-p+1}}{1-q} = 1\text{er terme} \times \dfrac{1 - q^{\text{nb de termes}}}{1-q}$

(pour $q \neq 1$)

▶ *Exemple :*

Soit (U_n) la suite géométrique de 1er terme $U_0 = 5$ et de raison $b = 2$.

$U_4 = q^4 \times U_0 = 2^4 \times 5 = 80$; $U_{10} = q^{10} \times U_0 = 2^{10} \times 5 = 5120$

Pour tout n, $U_n = q^n \times U_0 = 5 \times 2^n$.

$U_0 + U_1 + \cdots + U_8 = 5 \times \dfrac{1 - 2^9}{1-2} = 2555.$

b) Limite de q^n avec $q > 0$

• si $0 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.
• si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.
• si $q = 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 1$.

► *Exemples :*
• $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{3}\right)^n = +\infty$ car $\sqrt{3} > 1$.
• $\lim\limits_{n\to+\infty} 3 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 3$ car $0 < \frac{1}{2} < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1$.

c) Détermination du plus petit entier n tel que $q^n \geqslant a$ (si $q > 1$) ou tel que $q^n \leqslant a$ (si $0 < q < 1$)

Méthode : on isole q^n et on utilise que $\ln(q^n) = n \ln q$.

► *Exemples :*
• Recherche du plus petit entier n tel que $2^n \geqslant 3000$:
$2^n \geqslant 3000 \Leftrightarrow \ln(2^n) \geqslant \ln(3000) \Leftrightarrow n\ln 2 \geqslant \ln 3000 \Leftrightarrow n \geqslant \dfrac{\ln 3000}{\ln 2}$ (car $\ln 2 > 0$).
Or $\dfrac{\ln 3000}{\ln 2} \approx 11,55$. Le plus petit entier qui convient est donc 12.
• Recherche du plus petit entier n tel que $0,8^n \leqslant 0,01$:
$0,8^n \leqslant 0,01 \Leftrightarrow \ln(0,8^n) \leqslant \ln(0,01) \Leftrightarrow n\ln 0,8 \leqslant \ln 0,01 \Leftrightarrow n \geqslant \dfrac{\ln 0,01}{\ln 0,8}$ (car $\ln 0,8 < 0$).
Or $\dfrac{\ln 0,01}{\ln 0,8} \approx 20,64$. Le plus petit entier qui convient est donc 21.

8) Équations différentielles

a) Équations différentielles de la forme $y' + ay = b$

• Les solutions de l'équation différentielle $y' + ay = 0$ sont les fonctions f définies par $f(x) = k\,\mathrm{e}^{-ax}$.

• Les solutions de l'équation différentielle $y' + ay = b$ sont les fonctions f définies par $f(x) = k\,\mathrm{e}^{-ax} + \dfrac{b}{a}$.

► *Exemple :* : Résolution de $y' + 4y = 8$ ($a = 4$; $b = 8$)
• Les solutions sont définies par $f(x) = k\,\mathrm{e}^{-ax} + \dfrac{b}{a} = k\,\mathrm{e}^{-4x} + \dfrac{8}{4} = k\,\mathrm{e}^{-4x} + 2$.
• Recherche de la solution particulière telle que $f(0) = 1$:
Cela revient à déterminer k tel que $f(0) = 5 \Leftrightarrow k\,\mathrm{e}^0 + 2 = 5 \Leftrightarrow k = 3$.
La solution particulière cherchée est donc définie par $f(x) = 3\,\mathrm{e}^{-4x} + 2$.

9) Probabilités

a) Loi binomiale

DÉFINITION

• On appelle **épreuve de Bernoulli** toute expérience aléatoire ne présentant que deux issues possibles (contraires l'une de l'autre).
• On appelle **schéma de Bernoulli** toute répétition d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

► *Exemple :* Lancer un dé avec pour issues contraires ≪ obtenir un 6 ≫ et ≪ ne pas obtenir un 6 ≫ est une *épreuve* de Bernoulli.
Lancer notre dé 10 fois est un *schéma* de Bernoulli (on répète l'épreuve de Bernoulli) .
Par contre, si on s'intéresse ensemble aux six événements ≪ obtenir le chiffre n ≫ ($1 \leqslant n \leqslant 6$), ce n'est plus une épreuve de Bernoulli.
► **Remarques :**
• Les deux issues contraires d'une *épreuve* de Bernoulli se note en général S (pour ≪ succès ≫) et $\overline{S}$. La probabilité que S soit réalisé est noté en général p (la probabilité de $\overline{S}$ est alors $(1 - p)$).
PROPRIÉTÉ

Étant donné une épreuve de Bernoulli où la probabilité d'obtenir un succès S est p et le schéma de Bernoulli consistant à répèter n fois de manière indépendante cette épreuve. Si note X la variable aléatoire qui à chaque issue possible du schéma de Bernoulli associe le nombre de fois où est apparu un succès S, la loi de probabilité de X est appelée **loi binomiale** de paramètres n et p et est notée $\mathcal{B}(n, p)$.

- **Probabilité de n'obtenir que des succès** : $p(X = n) = p^n$
- **Probabilité de n'obtenir aucun succès** : $p(X = 0) = (1 - p)^n$
- **Probabilité d'obtenir k succès** : $p(X = k) = \binom{n}{k}\ p^k\ (1 - p)^{n-k}$

(k entier tel que : $0 \leqslant k \leqslant n$)

- **Probabilité d'obtenir au moins un succès**=1-(probabilité de n'obtenir aucun succès)
- **Espérance de X** : $E(X) = np$
- **Variance de X** : $V(X) = np(1 - p)$
- **Écart-type de X** : $\sigma(X) = \sqrt{np(1 - p)}$

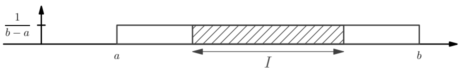
Obtention du coefficient binomial $\binom{n}{k}$ à la calculatrice :
CASIO : n `OPTN` `PROB` `nCr` k ; TI : n `MATH` `PROB` `3:Combinaison` k

► *Exemple :*
Si on lance 7 fois de suite un dé et si on note X le nombre de 6 obtenus, on répète 7 fois l'épreuve de Bernoulli : « obtenir un 6 (probabilité : $\frac{1}{6}$) - ne pas obtenir un 6 ».
X suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 7$ et $p = \frac{1}{6}$.
La probabilité d'obtenir exactement trois fois un « 6 » est égale à : $\binom{7}{3}\ \left(\frac{1}{6}\right)^3\ \left(\frac{5}{6}\right)^4$.
La probabilité de n'obtenir que des « 6 » est égale à : $\left(\frac{1}{6}\right)^7$
La probabilité de n'obtenir aucun « 6 » est égale à : $\left(\frac{5}{6}\right)^7$
L'espérance de X (nombre moyen de « 6 » que l'on peut espérer obtenir en répétant un grand nombre de fois l'expérience aléatoire) est égale à $np = \frac{7}{6}$.

b) Loi uniforme

DÉFINITION

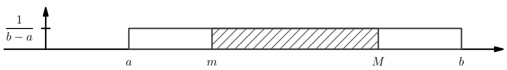
On dit qu'une variable aléatoire X suit la **loi uniforme** sur $[a\,;\,b]$ lorsque pour tout intervalle I, inclus dans $[a\,;\,b]$, la probabilité de l'événement « X appartient à I » est égale à l'aire du rectangle de base I et de hauteur $\dfrac{1}{b-a}$.



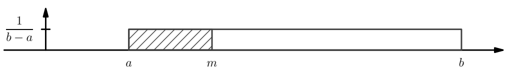
PROPRIÉTÉ

- Si une variable aléatoire X suit la **loi uniforme** sur $[a\,;\,b]$ alors pour tous réels m et M inclus dans $[a\,;\,b]$, les probabilités suivantes sont égales à l'aire du rectangle correspondant :

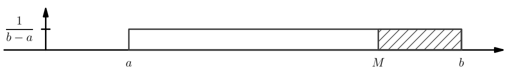
$p\,(m \leqslant X \leqslant M)$



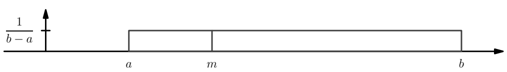
$p\,(X \leqslant m) = p\,(a \leqslant X \leqslant m)$



$p\,(X \geqslant M) = p\,(M \leqslant X \leqslant b)$



$p\,(X = m) = 0$



(on a les mêmes résultats avec des inégalités strictes)

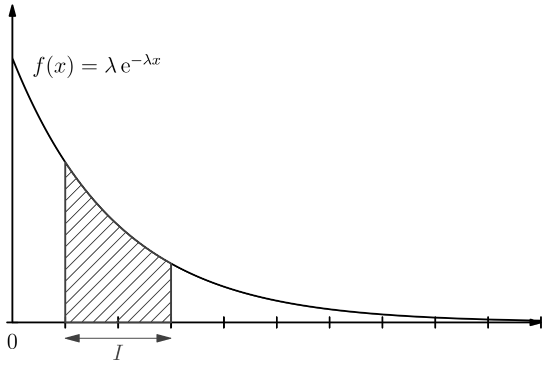
- Si une variable aléatoire X suit la **loi uniforme** sur $[a\,;\,b]$ alors :

l'espérance de X est égale à $\dfrac{a+b}{2}$. La **variance** est égale à $\dfrac{(b-a)^2}{12}$.

c) Loi exponentielle

DÉFINITION

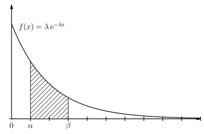
On dit qu'une variable aléatoire X suit la **loi exponentielle de paramètre** λ sur $[0\,;\,+\infty[$ lorsque pour tout intervalle I, inclus dans $[0\,;\,+\infty[$, la probabilité de l'événement « X appartient à I » est égale à l'aire sous la courbe sur I de la fonction f définie par $f(x) = \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}$



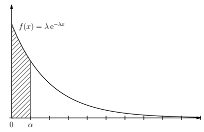
PROPRIÉTÉ

• Si une variable aléatoire X suit la **loi exponentielle de paramètre** λ sur $[0\,;\,+\infty[$ alors pour tous réels α et β inclus dans $[0\,;\,+\infty[$, on a :

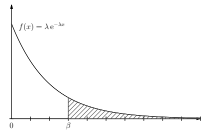
$$p\,(\alpha \leqslant X \leqslant \beta) = \int_\alpha^\beta \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_\alpha^\beta$$



$$p\,(X \leqslant \alpha) = p\,(0 \leqslant X \leqslant \alpha) = \int_0^\alpha \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^\alpha$$



$$p\,(X \geqslant \beta) = 1 - p\,(0 \leqslant X \leqslant \beta) = 1 - \int_0^\beta \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = 1 - \left[-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^\beta$$



(on a les mêmes résultats avec des inégalités strictes)

• Si une variable aléatoire X suit la **loi exponentielle de paramètre** λ sur $[0\,;\,+\infty[$ alors **l'espérance** de X est égale à $\dfrac{1}{\lambda}$.

► *Exemple :* La durée de vie X (en heures) d'un composant électronique suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,0006$ sur $[0, +\infty[$.

La probabilité qu'un de ces composants pris au hasard ait une durée de vie inférieure à 1000 heures est donnée par :

$p(X < 1000) = \displaystyle\int_0^{1000} 0,0006e^{-0,0006x}\,\mathrm{d}x = \left[-e^{-0,0006x}\right]_0^{1000} = 1 - e^{-0,6}$.

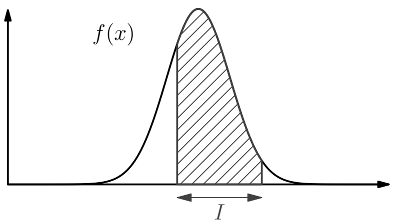
La probabilité qu'un de ces composants pris au hasard ait une durée de vie supérieure à 500 heures est donnée par :

$p(X > 500) = 1 - \displaystyle\int_0^{500} 0,0006e^{-0,0006x}\,\mathrm{d}x = 1 - \left[-e^{-0,0006x}\right]_0^{500} = e^{-0,3}$.

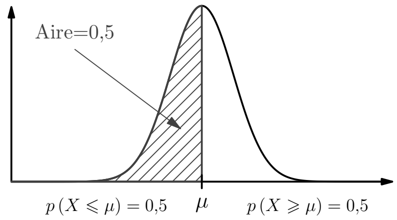
d) Loi normale

DÉFINITION

On dit qu'une variable aléatoire X suit la **loi normale d'espérance** μ **et d'écart-type** σ lorsque pour tout intervalle I la probabilité de l'événement « X appartient à I » est égale à l'aire sous la courbe sur I de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-0,5\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$.



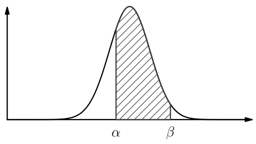
▶ **Remarque :** L'aire totale sous la courbe est égale à 1 (on dit que f est une densité de probabilité) et la courbe est symétrique par rapport à l'espérance μ. On a donc la situation suivante :



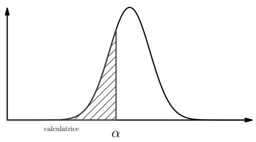
PROPRIÉTÉ

• Si une variable aléatoire X suit la **loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ** alors pour tous réels α et β, on a :

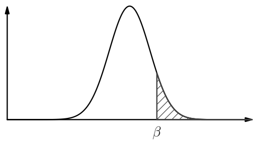
$p(\alpha \leqslant X \leqslant \beta) =$
TI : $\boxed{\texttt{DISTR (2nd+VARS)}}$ $\boxed{\texttt{normalcdf}}$ $(\alpha, \beta, \mu, \sigma)$
CASIO : $\boxed{\texttt{Menu STAT}}$ $\boxed{\texttt{DIST}}$ $\boxed{\texttt{NORM}}$ $\boxed{\texttt{NCD}}$ avec
Lower : α ; Upper : β ; σ : σ ; μ : μ



$p(X \leqslant \alpha) =$
TI : $\boxed{\texttt{normalcdf}}$ $(-10^{99}, \alpha, \mu, \sigma)$
CASIO : $\boxed{\texttt{NCD}}$ avec
Lower : -10^{99} ; Upper : α ; σ : σ ; μ : μ



$p(X \geqslant \beta) =$
TI : $\boxed{\texttt{normalcdf}}$ $(\beta, 10^{99}, \mu, \sigma)$
CASIO : $\boxed{\texttt{NCD}}$ avec
Lower : β ; Upper : 10^{99} ; σ : σ ; μ : μ



• **Valeurs remarquables :**
$p(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0,68$; $p(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = 0,95$; $p(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) = 0,997$

▶ *Exemple 1:* (pour tester sa calculatrice)
Si X suit la loi normale d'espérance $\mu = 58$ et d'écart-type $\sigma = 6$, on doit avoir :
$p(52 \leqslant X \leqslant 64) \approx 0,682689$; $p(X \leqslant 55) \approx 0,308538$; $p(X \geqslant 62) \approx 0,252493$

▶ *Exemple 2:* Le diamètre X des barres métalliques sortant d'un atelier suit la loi normale d'espérance 12 mm (le diamètre attendu) et d'écart-type 0,08 mm. Un client refuse d'acheter des tubes dont le diamètre ne serait pas compris entre 11,9 mm et 12,2 mm. On cherche à déterminer le pourcentage de tubes acceptés par le client.
$p(11,9 \leqslant X \leqslant 12,2) \approx 0,888$, donc 88,8% des tubes sont acceptés par le client.

▶ *Exemple 3:* Une variable aléatoire suivant une loi normale est telle que $p(X < 2) = 0,067$ et $p(X < 3) = 0,159$.
On peut en déduire que $p(X > 2) = 1 - p(X \leqslant 2) = 0,933$ et $p(2 < X < 3) = p(X < 3) - p(X < 2) = 0,092$.

10) Échantillonnage

a) Intervalle de fluctuation à 95%

PROPRIÉTÉ

Étant donné une population dans laquelle la proportion connue d'un certain caractère est p. Si on prélève, avec remise, un échantillon de taille n dans cette population alors il y a 95% de chance (dans certaines conditions) que la proportion f du caractère au sein de cet échantillon appartienne à l'intervalle :

$$\left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \,;\, p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right]$$

Cet intervalle est appelé **intervalle de fluctuation à 95%** de l'échantillon associé à la proportion p.

b) Prise de décision à partir d'un intervalle de fluctuation

PROPRIÉTÉ

> Étant donné une population dans laquelle **on suppose que la proportion d'un certain caractère est** p. Si on prélève, avec remise, un échantillon de taille n dans cette population et si la **fréquence réelle observée** f du caractère dans cet échantillon **est comprise dans l'intervalle de fluctuation** alors on dit qu'**on accepte au seuil de 95% l'hypothèse que la proportion réelle du caractère dans la population est bien** p (dans le cas contraire, on dit qu'on rejette l'hypothèse).

► *Exemple :* Un candidat pense que 52% des électeurs lui sont favorables. On prélève avec remise un échantillon de 500 électeurs : 47% des électeurs interrogés de cet échantillon se déclarent favorable au candidat en question.
L'intervalle de fluctuation de l'échantillon associé à la proportion de 52% est $[0,476\,;\,0,564]$ car :
$0,52 - 1,96\sqrt{\dfrac{0,52 \times 0,48}{500}} \approx 0,476$ et $0,52 + 1,96\sqrt{\dfrac{0,52 \times 0,48}{500}} \approx 0,564$.
$0,47$ étant en dehors de l'intervalle de fluctuation, on peut rejeter au seuil de 95% l'hypothèse du candidat selon laquelle 52% des électeurs lui sont favorables.

c) Estimation par un intervalle de confiance

PROPRIÉTÉ

> On cherche à connaitre une estimation de la proportion p inconnue d'un certain caractère au sein d'une population. Pour cela, on prélève avec remise un échantillon de taille n au sein de la population et on note f la proportion observée du caractère au sein de l'échantillon. Il y alors 95% de chance (dans certaines conditions) que la proportion p du caractère au sein de la population totale soit comprise dans l'intervalle :
>
> $$\left[f - 1,96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}\,;\, f + 1,96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}\right]$$
>
> Cet intervalle est appelé **intervalle de confiance à 95%** associé à la proportion f.

► *Exemple :* Un sondage réalisé sur un échantillon de 1000 personnes attribue à un candidat un score de 18%. L'intervalle de confiance à 95% associé à cette proportion observée de 18% dans l'échantillon est $[15,6\%\,;\,20,3\%]$ car :
$0,18 - 1,96\sqrt{\dfrac{0,18 \times 0,82}{1000}} \approx 0,156$ et $0,18 + 1,96\sqrt{\dfrac{0,18 \times 0,82}{1000}} \approx 0,203$.