Équations de droite : Résumé de cours et méthodes

Le plan est muni d'un repère.

1 Équations cartésiennes d'une droite

• Toute droite du plan admet une équation, dite cartésienne, de la forme $ax+by+c=0$ (a et b ne pouvant pas être nuls en même temps).

• Un vecteur directeur de la droite est alors $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$.

• Dire qu'un point $A\begin{pmatrix}x_A\\y_A\end{pmatrix}$ appartient à la droite d'équation $ax+by+c=0$ signifie que ses coordonnées vérifient l'équation, c'est à dire que $ax_A+by_A+c=0$.

• Dire que la droite D d'équation cartésienne $ax+by+c=0$ est parallèle à la droite D' d'équation cartésienne $a'x+b'y+c'=0$ équivaut à dire $\det\left(\vec{u},\vec{u'}\right)=0$ avec $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$,vecteur directeur de D, et $\vec{u}'\begin{pmatrix}-b'\\a'\end{pmatrix}$,vecteur directeur de D'.

1-1 Comment déterminer une équation cartésienne d'une droite connaissant deux de ses points ?

Méthode générale : équation cartésienne de la droite passant par deux points distincts A et B.

• On exprime que dire qu'un point $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ appartient à la droite (AB) équivaut à dire que $\det(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB})=0$.

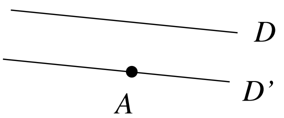
Exemple : Déterminons une équation cartésienne de la droite D passant par $A\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$.

$M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in D \Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}\right)=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}x-3 & 2\\ y+2 & 3\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow 3(x-3)-2(y+2)=0 \Leftrightarrow 3x-9-2y-4=0 \Leftrightarrow 3x-2y-13=0.$

Une équation cartésienne de D est : $3x-2y-13=0$.

1-2 Comment déterminer une équation cartésienne de la droite parallèle à une droite connue et passant par un point connu ?

Méthode générale possible : équation cartésienne de la droite D' parallèle à la droite D et passant par $A\begin{pmatrix}x_A\\y_A\end{pmatrix}$.



On exprime que dire qu'un point $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ appartient à la droite D' équivaut à dire que $\det(\overrightarrow{AM},\vec{u})=0$ avec $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$,vecteur directeur de D.

Exemple :

Déterminons une équation cartésienne de la droite D' parallèle à la droite D d'équation $3x-5y-4=0$ et passant par $A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

Un vecteur directeur de D est $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$.

$M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in D' \Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{AM},\vec{u}\right)=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}x-1 & 5\\ y-2 & 3\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow 3(x-1)-5(y-2)=0 \Leftrightarrow 3x-3-5y+10=0 \Leftrightarrow 3x-5y+7=0.$

Une équation cartésienne de D est : $3x-5y+7=0$.

2 Équation réduite d'une droite

Pour les droites non parallèles à l'axe des ordonnées :
• Elles admettent une équation réduite de la forme $y = mx + p$.
m est le **coefficient directeur** et p est l'ordonnée à l'origine.
• Dire qu'un point $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ appartient à la droite d'équation $y = mx + p$ signifie que ses coordonnées vérifient l'équation, c'est à dire que $y_A = mx_A + p$.
• Étant donné les droites D d'équation $y = mx + p$ et D' d'équation $y = m'x + p'$:
D est parallèle à D' si et seulement si $m = m'$.

Pour les droites parallèles à l'axe des ordonnées :
Elles admettent une équation de la forme $x = c$.

2-1 Comment déterminer l'équation réduite d'une droite connaissant deux de ses points ?

Méthode générale : équation réduite de la droite D passant par $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$.
• si A et B ont la même abscisse alors D est parallèle à l'axe des ordonnées et admet $x = x_A$ comme équation.

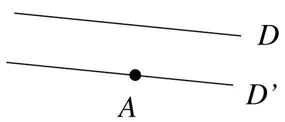
• Dans le cas contraire, on calcule d'abord le coefficient directeur m avec la formule suivante :
$m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{\text{différence des ordonnées}}{\text{différence des abscisses}}$.
Pour déterminer p, on exprime que les coordonnées de A doivent vérifier l'équation, c'est à dire que $y_A = mx_A + p$.

Exemple : Déterminons l'équation réduite de la droite D passant par $A\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$.

On a $m = \dfrac{-1-(-2)}{4-2} = \dfrac{1}{2}$. De plus, $y_A = mx_A + p \Leftrightarrow -2 = \dfrac{1}{2} \times 2 + p \Leftrightarrow p = -3$. L'équation réduite de D est $y = \dfrac{1}{2}x - 3$.

2-2 Comment déterminer l'équation réduite de la droite parallèle à une droite connue et passant par un point connu ?

Méthode générale : équation réduite de la droite D' parallèle à la droite D et passant par $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$.



• Si D n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées :
D admet une équation réduite de la forme $y = mx + p$ et D' une équation réduite de la forme $y = m'x + p'$ avec $m' = m$. Pour déterminer p', on exprime que les coordonnées de A doivent vérifier l'équation de D', c'est à dire que $y_A = m'x_A + p'$.

• Si D est parallèle à l'axe des ordonnées :
D' est aussi parallèle à l'axe des ordonnées et comme elle passe par A, son équation est $x = x_A$.

Exemple 1 : Déterminons l'équation réduite de la droite D' parallèle à la droite D d'équation $y = 3x - 4$ et passant par $A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
.
On a $m' = m = 3$ et $y_A = m'x_A + p' \Leftrightarrow 2 = 3 \times 1 + p' \Leftrightarrow p' = -1$.
L'équation réduite de D' est donc $y = 3x - 1$.

Exemple 2 : On considère les points $B\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Déterminons l'équation réduite de la droite D' parallèle à la droite (BC) et passant par $A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Le coefficient directeur de D' est le même que celui de (BC). Donc, $m' = \dfrac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \dfrac{8-2}{3-0} = 2$.
Et, $y_A = m'x_A + p' \Leftrightarrow -1 = 2 \times 1 + p' \Leftrightarrow p' = -3$.
L'équation réduite de D' est donc $y = 2x - 3$.

2-3 Exemple de recherche de l'équation réduite d'une médiane

Dans un repère, on considère les points $A\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix}$.

• Déterminons l'équation réduite de la médiane issue de A dans le triangle ABC.
Elle passe par A et par I, le milieu de $[BC]$.
Or, $x_I = \dfrac{x_B + x_C}{2} = 0$ et $y_I = \dfrac{y_B + y_C}{2} = -1$. Donc, $I\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Le coefficient directeur de la médiane est $m = \dfrac{y_I - y_A}{x_I - x_A} = \dfrac{-1-1}{0-(-3)} = -\dfrac{2}{3}$.
Et, $y_A = mx_A + p \Leftrightarrow 1 = -\dfrac{2}{3} \times (-3) + p \Leftrightarrow p = -1$.
L'équation réduite de la médiane est donc $y = -\dfrac{2}{3}x - 1$.