

Fonctions : Résumé de cours et méthodes

1 Généralités

Une fonction f définie sur D_f associe à chaque réel x de D_f un unique réel noté $f(x)$.

D_f est appelé l'**ensemble de définition** de f .

$f(x)$ est l'**image** de x par $f(x)$.

Tout réel x de D_f tel que $f(x) = y$ est dit **antécédent** de y par f .

• **Exemple** : Soit f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2$.

$f(2) = 2^2 = 4$. Donc 4 est l'image de 2 par f .

$f(x)$

2 $\xrightarrow{\quad}$ 4

(antécédent de 4)

(image de 2)

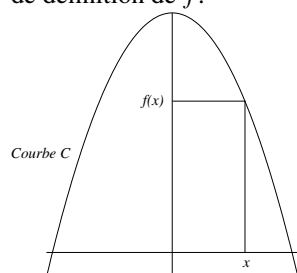
On peut aussi dire que 2 est un antécédent de 4 par f .

Mais ce n'est pas le seul : on a aussi $f(-2) = (-2)^2 = 4$. Donc, -2 est aussi un antécédent de 4 par f .

Si un réel admet au plus une seule image par une fonction, il peut admettre plusieurs antécédents.

2 Courbe représentative

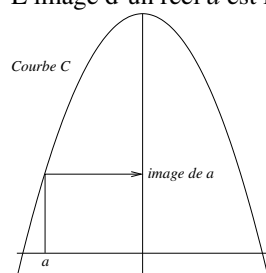
Dans un repère donné, la courbe C représentative de la fonction f est l'ensemble des points $M \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$ où x décrit l'ensemble de définition de f .



Une équation de la courbe est : $y = f(x)$.

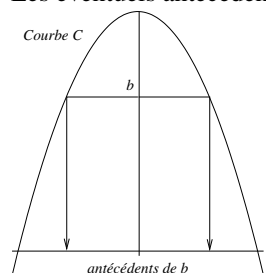
• Recherche graphique de l'image d'un réel :

L'image d'un réel a est l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse a .



• Recherche graphique des antécédents d'un réel :

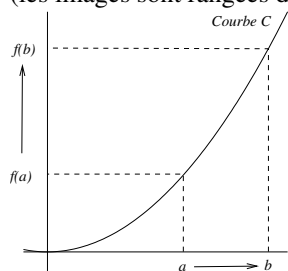
Les éventuels antécédents d'un réel b sont les abscisses des points de la courbe d'ordonnée b .



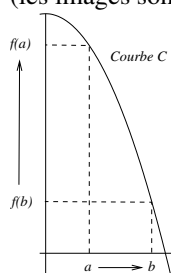
3 Fonction croissante ou décroissante sur un intervalle

Soit I un intervalle contenu dans l'ensemble de définition de la fonction f .

- f est dite **croissante** sur I si pour tous réels a et b tels que $a < b$, on a $f(a) \leq f(b)$.
(les images sont rangées dans le même ordre que les réels de départ)

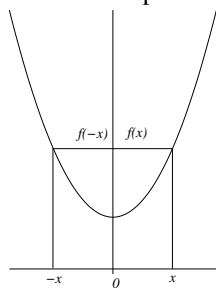


- f est dite **décroissante** sur I si pour tous réels a et b tels que $a < b$, on a $f(a) \geq f(b)$.
(les images sont rangées dans l'ordre contraire que les réels de départ)

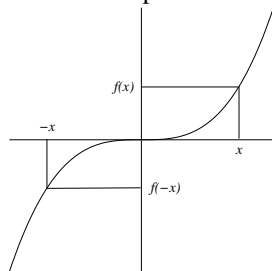


4 Fonction paire - Fonction impaire

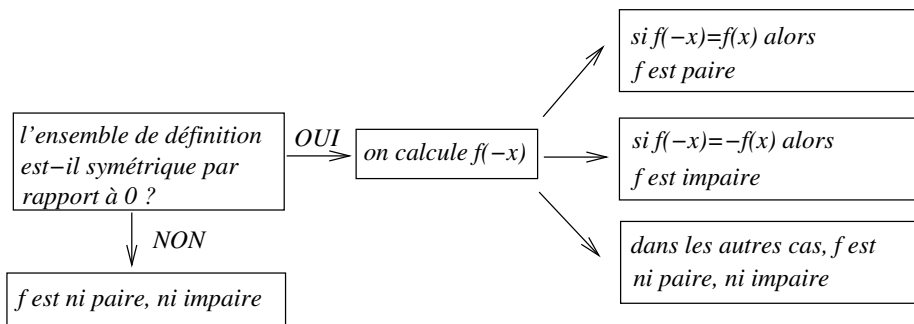
- f est dite **paire** si son ensemble de définition D_f est symétrique par rapport à 0 et si, pour tout x de D_f , $f(-x) = f(x)$.
La courbe représentative dans un repère orthogonal est alors symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



- f est dite **impaire** si son ensemble de définition D_f est symétrique par rapport à 0 et si, pour tout x de D_f , $f(-x) = -f(x)$.
La courbe représentative est alors symétrique par rapport à l'origine du repère.



- Méthode pour déterminer si une fonction est paire, impaire ou ni l'une, ni l'autre :



• **Exemples :**

1) f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 2x^2 + 1$ est paire car \mathbb{R} est symétrique par rapport à 0 et pour tout x de \mathbb{R} , $f(-x) = 2(-x)^2 + 1 = 2x^2 + 1 = f(x)$.

2) f définie sur $[0; +\infty[$ est ni paire, ni impaire car $[0; +\infty[$ n'est pas symétrique par rapport à 0.

3) f définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = -\frac{2}{x}$ est impaire car \mathbb{R}^* est symétrique par rapport à 0 et pour tout x de \mathbb{R}^* , $f(-x) = -\frac{2}{(-x)} = -\left(-\frac{2}{x}\right) = -f(x)$.

4) f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x + 3$ est ni paire, ni impaire car si \mathbb{R} est bien symétrique par rapport à 0, $f(-x) = -x + 3$ est ni égal à $f(x)$, ni à $-f(x)$.

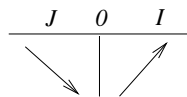
5 Conséquences de la parité d'une fonction sur ses variations

Soit f une fonction paire ou impaire, I un intervalle compris dans son ensemble de définition ne comprenant que des réels positifs et J l'intervalle symétrique de I par rapport à 0.

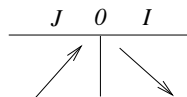
En connaissant le sens de variation de I , on peut en déduire celui sur J grâce aux propriétés suivantes :

• Si f est paire :

Si f est croissante sur I ,
alors f est décroissante sur J

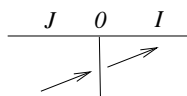


Si f est décroissante sur I ,
alors f est croissante sur J

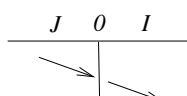


• Si f est impaire :

Si f est croissante sur I ,
alors f est croissante sur J



Si f est décroissante sur I ,
alors f est décroissante sur J



6 Résolution graphique d'équations et d'inéquations grâce à la courbe d'une fonction

Principe général :

Soit f une fonction, I un intervalle compris dans son ensemble de définition, C sa courbe représentative et D la droite d'équation $y = b$.

- Les solutions sur I de l'équation $f(x) = b$ sont les abscisses des points d'intersection entre la courbe C et la droite D .
- Les solutions sur I de l'inéquation $f(x) > b$ sont les abscisses des points de la courbe C situés strictement au dessus de la droite D . (pour $f(x) \geq b$, il suffit de rajouter les abscisses des points d'intersection)
- Les solutions sur I de l'inéquation $f(x) < b$ sont les abscisses des points de la courbe C situés strictement en dessous de la droite D . (pour $f(x) \leq b$, il suffit de rajouter les abscisses des points d'intersection)

• **Exemple :** soit f la fonction dont la courbe est donnée ci-dessous.

Graphiquement, on peut dire que les solutions dans l'intervalle $[-4; 4]$ de l'équation $f(x) = 2$ sont -3 et 2 .

De même, on peut dire que les solutions de l'inéquation $f(x) \leq 2$, sont les réels compris entre -3 et 2 .

