

Inéquations : Résumé de cours et méthodes

1 Principe général

Résoudre une inéquation, c'est déterminer l'ensemble S de tous les réels x vérifiant l'inégalité donnée. L'ensemble des solutions S se présente en général sous la forme d'un intervalle ou d'une union d'intervalles.

Pour déterminer si les bornes de S sont ouvertes ou fermées on applique la règle suivante :

Les bornes sont ouvertes si l'inégalité formant l'inéquation est stricte, si la borne correspond à un infini ou à une double barre. Dans tous les autres cas, les bornes sont fermées.

2 Rappel sur les inégalités

Si on multiplie (ou on divise) une inégalité par un nombre strictement négatif, on change le sens de cette inégalité.

Exemple : Résolution de $3 - 2x > 4$

$$3 - 2x > 4 \Leftrightarrow -2x > 4 - 3 \Leftrightarrow -2x > 1 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{2}. \text{ Donc, } S = \left] -\infty; -\frac{1}{2} \right[$$

Les bornes sont ouvertes car l'inégalité est stricte.

3 Signe de $ax + b$

Pour $a \neq 0$, on applique la règle suivante :

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
signe de $ax + b$	signe de $(-a)$	0	signe de a

Cette règle peut se résumer par la phrase suivante : «signe de a après le 0».

Exemple : Etude du signe de $-2x + 3$

- On cherche la valeur qui annule $-2x + 3$: $-2x + 3 = 0 \Leftrightarrow -2x = -3 \Leftrightarrow x = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$.
- On complète le tableau en utilisant la règle : «signe de $a = -2$ après le 0»

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
signe de $-2x + 3$	+	0	-

4 Inéquations sans inconnue au dénominateur nécessitant un tableau de signes

Méthode générale :

- Se ramener à 0 en transposant tout dans le premier membre
- Factoriser le premier membre
- Construire un tableau de signes avec une ligne pour chaque facteur. En déduire, à l'aide de la règle des signes, le signe du premier membre dans la dernière ligne.
- Ecrire l'ensemble des solutions S sous la forme d'un intervalle ou d'une union d'intervalles.

Exemple : Résolution de l'inéquation $x^2 \geq (2x - 1)^2$

- on se ramène à 0 : $x^2 - (2x - 1)^2 \geq 0$
- on factorise (on reconnaît la forme $a^2 - b^2$) : $[x - (2x - 1)] \times [x + (2x - 1)] \geq 0 \Leftrightarrow (-x + 1)(3x - 1) \geq 0$
- on construit et on complète le tableau de signes :

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	1	$+\infty$	
signe de $-x + 1$	+	+	0	-	
signe de $3x - 1$	-	0	+	+	
signe de $(-x + 1)(3x - 1)$	-	0	+	0	-

Explications :

$-x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Signe de $a = -1$ après le 0.

$3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$. Signe de $a = 3$ après le 0.

On applique la règle des signes pour la dernière ligne.

On écrit S en cherchant quelles sont les valeurs de x dans la première ligne pour lesquelles on obtient un signe + dans la dernière ligne puisque l'inéquation se ramène à $(-x + 1)(3x - 1) \geq 0$.

On obtient $S = \left[\frac{1}{3}; 1 \right]$. (les bornes sont fermées car l'inégalité n'est pas stricte et qu'elles ne correspondent pas à des infinis)

5 Inéquations avec l'inconnue au dénominateur nécessitant un tableau de signes

Méthode générale :

- Se ramener à 0 en transposant tout dans le premier membre
- Réduire le premier membre sous le même dénominateur
- Factoriser le premier membre
- Construire un tableau de signes avec une ligne pour chaque facteur. En déduire, à l'aide de la règle des signes, le signe du premier membre dans la dernière ligne. **Attention :** il faut ajouter une **double barre** dans la dernière ligne pour toutes les valeurs de x qui annulent le dénominateur.
- Ecrire l'ensemble des solutions S sous la forme d'un intervalle ou d'une union d'intervalles.

Exemple : Résolution de l'inéquation $\frac{1-x}{x} \leq 2$

• on se ramène à 0 : $\frac{1-x}{x} - 2 \leq 0$

• on réduit le premier membre au même dénominateur : $\frac{1-x}{x} - \frac{2x}{x} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1-3x}{x} \leq 0$

• on construit et on complète le tableau de signes :

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{3}$	$+\infty$	
signe de $1 - 3x$	+	+	0	-	
signe de x	-	0	+	+	
signe de $\frac{1-3x}{x}$	-		+	0	-

Explications :

$1 - 3x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$. Signe de $a = -3$ après le 0.

x est évidemment positif après 0 et négatif avant.

On applique la règle des signes pour la dernière ligne en n'oubliant pas d'ajouter une double barre en 0 car le dénominateur s'annule pour $x = 0$.

On écrit S en cherchant quelles sont les valeurs de x dans la première ligne pour lesquelles on obtient un signe - dans la dernière ligne puisque l'inéquation se ramène à $\frac{1-3x}{x} \leq 0$. On obtient $S =]-\infty; 0[\cup \left[\frac{1}{3}; +\infty \right[$.

Les bornes sont ouvertes aux infinis et en 0 (à cause de la double barre). La borne qui reste est fermée car l'inégalité n'est pas stricte.