Inéquations
Résumé de cours et méthodes

1. Principe général

Résoudre une inéquation, c'est déterminer l'ensemble S de tous les réels x vérifiant l'inégalité donnée. L'ensemble des solutions S se présente en général sous la forme d'un intervalle ou d'une union d'intervalles.

Pour déterminer si les bornes de S sont ouvertes ou fermées on applique la règle suivante :
Les bornes sont ouvertes si l'inégalité formant l'inéquation est stricte, si la borne correspond à un infini ou à une double barre.
Dans tous les autres cas, les bornes sont fermées.

2. Rappel sur les inégalités

Si on multiplie (ou on divise) une inégalité par un nombre strictement négatif, on change le sens de cette inégalité.
Exemple : Résolution de $3-2x>4$
$3-2x>4 \Leftrightarrow -2x>4-3 \Leftrightarrow -2x>1 \Leftrightarrow x<-\frac{1}{2}$. Donc, $S=\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[$
Les bornes sont ouvertes car l'inégalité est stricte.

3. Signe de $ax+b$

Pour $a \neq 0$, on applique la règle suivante :

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
signe de $ax+b$		signe de $(-a)$	0	signe de a	

Cette règle peut se résumer par la phrase suivante : «signe de a après le 0».

Exemple : Etude du signe de $-2x+3$
• On cherche la valeur qui annule $-2x+3$: $-2x+3=0 \Leftrightarrow -2x=-3 \Leftrightarrow x=\frac{-3}{-2}=\frac{3}{2}$.
• On complète le tableau en utilisant la règle : «signe de $a=-2$ après le 0»

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
signe de $-2x+3$		$+$	0	$-$	

4. Inéquations sans inconnue au dénominateur nécessitant un tableau de signes

Méthode générale :
- Se ramener à 0 en transposant tout dans le premier membre
- Factoriser le premier membre
- Construire un tableau de signes avec une ligne pour chaque facteur. En déduire, à l'aide de la règle des signes, le signe du premier membre dans le dernière ligne.
- Écrire l'ensemble des solutions S sous la forme d'un intervalle ou d'une union d'intervalles.

Exemple : Résolution de l'inéquation $x^2 \geqslant (2x-1)^2$
• on se raméne à 0 : $x^2-(2x-1)^2 \geqslant 0$
• on factorise (on reconnaît la forme a^2-b^2) : $[x-(2x-1)]\times[x+(2x-1)] \geqslant 0 \Leftrightarrow (-x+1)(3x-1) \geqslant 0$

• on construit et on complète le tableau de signes :

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
signe de $-x+1$		$+$		$+$	0	$-$	
signe de $3x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $(-x+1)(3x-1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Explications :
$-x+1=0 \Leftrightarrow x=1$. Signe de $a=-1$ après le 0.
$3x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$. Signe de $a=3$ après le 0.
On applique la règle des signes pour la dernière ligne.
On écrit S en cherchant quelles sont les valeurs de x dans la première ligne pour lesquelles on obtient un signe + dans la dernière ligne puisque l'inéquation se raméne à $(-x+1)(3x-1) \geqslant 0$.
On obtient $S=\left[\frac{1}{3};1\right]$. (les bornes sont fermées car l'inégalité n'est pas stricte et qu'elles ne correspondent pas à des infinis)

5. Inéquations avec l'inconnue au dénominateur nécessitant un tableau de signes

Méthode générale :
- Se ramener à 0 en transposant tout dans le premier membre
- Réduire le premier membre sous le même dénominateur
- Factoriser le premier membre
- Construire un tableau de signes avec une ligne pour chaque facteur. En déduire, à l'aide de la règle des signes, le signe du premier membre dans le dernière ligne. **Attention :** il faut ajouter une **double barre** dans la dernière ligne pour toutes les valeurs de x qui annulent le dénominateur.
- Ecrire l'ensemble des solutions S sous la forme d'un intervalle ou d'une union d'intervalles.

Exemple : Résolution de l'inéquation $\dfrac{1-x}{x} \leqslant 2$

• on se raméne à 0 : $\dfrac{1-x}{x}-2 \leqslant 0$

• on réduit le premier membre au même dénominateur : $\dfrac{1-x}{x}-\dfrac{2x}{x} \leqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{1-3x}{x} \leqslant 0$

• on construit et on complète le tableau de signes :

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
signe de $1-3x$		$+$		$+$	0	$-$	
signe de x		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $\dfrac{1-3x}{x}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

Explications :
$1-3x=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$. Signe de $a=-3$ après le 0.
x est évidemment positif après 0 et négatif avant.
On applique la règle des signes pour la dernière ligne en n'oubliant pas d'ajouter une double barre en 0 car le dénominateur s'annule pour $x=0$.
On écrit S en cherchant quelles sont les valeurs de x dans la première ligne pour lesquelles on obtient un signe - dans la dernière ligne puisque l'inéquation se raméne à $\dfrac{1-3x}{x} \leqslant 0$. On obtient $S=\left]-\infty;0\right[\cup \left[\frac{1}{3};+\infty\right[$.
Les bornes sont ouvertes aux infinis et en 0 (à cause de la double barre). La borne qui reste est fermée car l'inégalité n'est pas stricte.