Équations
Résumé de cours et méthodes

Principe général

Résoudre une équation dans l'ensemble des réels, c'est trouver toutes les valeurs de l'inconnue qui vérifient l'égalité formant l'équation, c'est à dire donner l'ensemble des solutions (noté en général S).

1. Équations de la forme $ax + b = 0$

Si $a \neq 0$, l'équation $ax+b=0$ équivaut à $ax=-b$, c'est à dire à $x=-\frac{b}{a}$.

Exemple : $-3x+4=0 \Leftrightarrow -3x=-4 \Leftrightarrow x=\frac{-4}{-3}=\frac{4}{3}$.

On écrit que $S=\left\{\frac{4}{3}\right\}$.

2. Équations sans inconnues au dénominateur

Méthode générale :
- se ramener à 0 en transposant tout dans le premier membre
- factoriser le premier membre afin de le transformer en produit de facteurs du premier degré
- utiliser que $A \times B = 0 \Leftrightarrow A=0$ ou $B=0$

Exemple : Résolution dans l'ensemble des réels de $2x^2=x$.
On se ramène à 0 : $2x^2-x=0$.
On factorise le premier membre : $x(2x-1)=0$.
On a donc $x=0$ ou $2x-1=0 \Leftrightarrow 2x=1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$.
D'où, $S=\left\{0\,;\,\frac{1}{2}\right\}$

3. Équations avec l'inconnue au dénominateur

Méthode générale :
- déterminer les **valeurs interdites**, c'est à dire les valeurs de l'inconnue qui annulent le(s) dénominateur(s).
- utiliser le «produit en croix» : $\frac{A}{B}=\frac{C}{D} \Leftrightarrow A \times D = B \times C$ (avec $B \neq 0$ et $D \neq 0$)
- OU se ramener à 0 (en transposant tout dans le premier membre), puis en réduisant ce premier membre sous le même dénominateur.
  On utilise alors que $\frac{A}{B}=0 \Leftrightarrow A=0$ (avec $B \neq 0$)
- vérifier que les valeurs trouvées ne sont pas des valeurs interdites.

Exemple : Résolution dans l'ensemble des réels de $\frac{x-3}{x-12}=\frac{-3}{x}$.
Les deux dénominateurs $x-12$ et x s'annulent pour $x=12$ et $x=0$. Les deux valeurs interdites sont donc 0 et 12.
Le produit en croix donne : $x(x-3)=-3(x-12)$.
On se ramène à 0 : $x(x-3)+3(x-12)=0$.
On ne reconnaît aucun facteur commun ou différence de deux carrés. On développe donc pour simplifier le premier membre.
Il vient, $x^2-3x+3x-36=0 \Leftrightarrow x^2-36=0$.
On reconnaît une différence de deux carrés, il reste : $(x-6)(x+6)=0$.
Ce qui donne $x-6=0$ ou $x+6=0$. Ainsi, on a $x=6$ ou $x=-6$ qui ne sont pas des valeurs interdites. Donc, $S=\{6\,;\,-6\}$

4. Cas des équations où l'inconnue s'élimine

- Si l'égalité qui reste est vraie alors tous les réels sont solutions. On écrit que $S=\mathbb{R}$.
- Si l'égalité qui reste est fausse alors l'équation n'admet aucune solution. On écrit que $S=\varnothing$.

Exemple : $3(x+1)-2x=x \Leftrightarrow 3x+3-2x-x=0 \Leftrightarrow 3=0$.
On obtient une égalité fausse, $S=\varnothing$