# Systèmes linéaires : Résumé de cours et méthodes

## 1 Systèmes linéaires de 2 équations à 2 inconnues

On considère le système : $\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$

($x$ et $y$ sont les inconnues, $L_1$ et $L_2$ désignent les deux équations formant le système)

Résoudre ce système, c'est déterminer l'ensemble $S$ des couples $(x, y)$ vérifiant les deux équations simultanément.

► **Remarque :** Résoudre un tel système revient à déterminer dans un repère les coordonnées des points d'intersection entre la droite $D$ d'équation cartésienne $ax+by-c=0$ et la droite $D'$ d'équation $a'x+b'y-c'=0$.

Le système admet donc un unique couple solution si et seulement si $\det\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'}\right) \neq 0$ avec $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$,vecteur directeur de $D$, et $\overrightarrow{u}'\begin{pmatrix} -b' \\ a' \end{pmatrix}$,vecteur directeur de $D'$.

## 2 Résolution des systèmes linéaires de 2 équations à 2 inconnues admettant un unique couple solution

On suppose donc ici que le système admet un unique couple solution.

**Principe général :**
Pour trouver $x$, on cherche à éliminer $y$. Cela se fait en multipliant les deux équations par des coefficients judicieusement choisis de telle façon qu'en ajoutant ces deux nouvelles équations les terme en $y$ s'éliminent.
Ce style d'opération s'appelle une **combinaison linéaire**.
Pour trouver $y$, on élimine de la même façon $x$ avec une autre combinaison linéaire.

► *Exemple :*

$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} 4x-y=21 \\ 3x+2y=13 \end{cases}.$

• Pour trouver $x$, on élimine $y$ à l'aide de la combinaison linéaire $2L_1+L_2$.
*(Remarque : pour déterminer la combinaison linéaire il faut bien observer les coefficients devant y)*
Le calcul donne :

$$\begin{array}{l} 2L_1 : 8x-2y=42 \\ \underline{L_2 : 3x+2y=13} \\ 2L_1+L_2 : 11x=55 \end{array}.$$

On en déduit que $x=5$.

• Pour trouver $y$, on élimine $x$ à l'aide de la combinaison linéaire $3L_1-4L_2$.
Le calcul donne :

$$\begin{array}{l} 3L_1 : 12x-3y=63 \\ \underline{-4L_2 : -12x-8y=-42} \\ 3L_1-4L_2 : -11y=11 \end{array}.$$

On en déduit que $y=-1$.

Remarque : il est inutile de détailler autant les calculs sur une copie. Il est préférable de rédiger de la façon suivante :

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} 4x-y=21 \\ 3x+2y=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} 2L_1+L_2 \\ 3L_1-4L_2 \end{matrix} \begin{cases} 11x=55 \\ -11y=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=-1 \end{cases} .S=\{(5;-1)\}$$