

Vecteurs du plan - Seconde

©Pascal Brachet (CC BY NC SA)

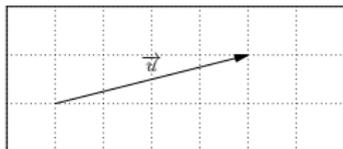
<https://www.xm1math.net>

1. Généralités sur les vecteurs

a) Caractérisation d'un vecteur non nul

Définition

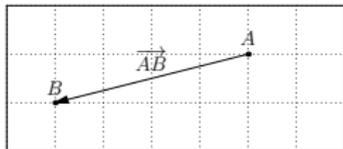
Une direction, un sens et une longueur non nulle définissent un unique vecteur non nul \vec{u} .
(la direction est indiquée par la droite portant \vec{u} , le sens est indiqué par la flèche)



b) Vecteur défini par deux points distincts

Définition

Étant donné deux points distincts A et B :
 Le vecteur caractérisé par la direction de la droite (AB) , le sens de A vers B et la longueur AB est noté \overrightarrow{AB} .
 Le point A est dit **origine** du vecteur \overrightarrow{AB} .
 Le point B est dit **extrémité** du vecteur \overrightarrow{AB} .

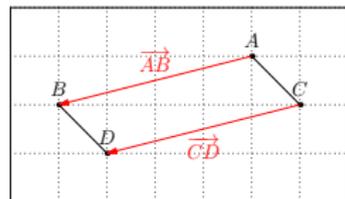


1. Généralités sur les vecteurs

Propriété(s)

Étant donné quatre points A , B , C et D avec $A \neq B$.

Dire que les deux vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} sont égaux équivaut à dire que le quadrilatère $ABDC$ est un parallélogramme.

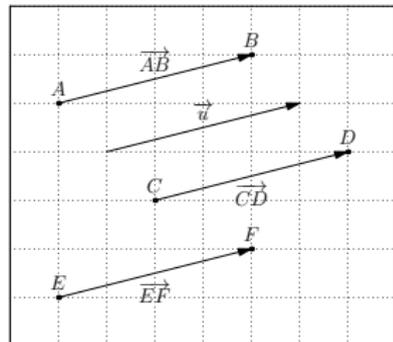


c) Représentants d'un vecteur non nul

Pour avoir deux vecteurs égaux, il suffit donc de construire un parallélogramme.

► Conséquences :

- Étant donné un vecteur non nul \vec{u} , il existe une infinité de vecteurs (\overrightarrow{AB} , \overrightarrow{CD} , \overrightarrow{EF} , ...) égaux à \vec{u} .
- Ces vecteurs sont dits **représentants** du vecteur \vec{u} . Il y en a donc une infinité si on a le choix de l'origine du représentant.
- Mais si on fixe l'origine du représentant, le vecteur \vec{u} n'admet qu'un seul représentant partant de cette origine. Autrement dit, pour tout point A il existe un unique point B tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.



1. Généralités sur les vecteurs

d) Norme d'un vecteur non nul

Définition

La longueur d'un vecteur non nul \vec{u} est aussi appelée **norme** de \vec{u} et est notée $\|\vec{u}\|$.

Conséquence : si le vecteur est défini par deux points A et B , la norme de \overrightarrow{AB} est égale à la distance AB . Autrement dit, $\|\overrightarrow{AB}\| = AB$.

e) Vecteur nul

Définition

Pour tout point A , on pose que $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$ où $\vec{0}$ est appelé vecteur nul.

► Remarque : le vecteur nul $\vec{0}$ n'a ni direction, ni sens et il est de longueur nulle.

f) Vecteur unitaire

Définition

On appelle **vecteur unitaire**, tout vecteur de longueur égale à 1 (dans l'unité choisie).

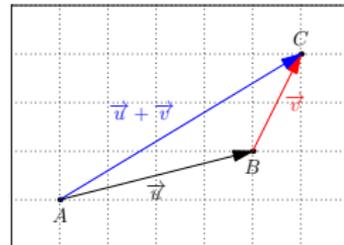
Autrement dit, dire qu'un vecteur \vec{u} est unitaire équivaut à dire que $\|\vec{u}\| = 1$.

2. Somme et différence de deux vecteurs

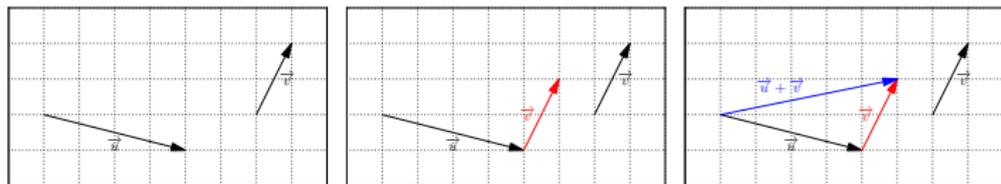
a) Somme de deux vecteurs

Définition

- Étant donné deux vecteurs non nuls \vec{u} et \vec{v} et A un point du plan.
Si on note B et C les points tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$, on appelle alors somme de \vec{u} et \vec{v} le vecteur, noté $\vec{u} + \vec{v}$, représenté par \overrightarrow{AC} .
- Par convention, on pose $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$ et $\vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$.



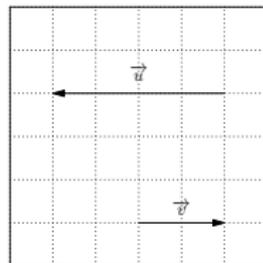
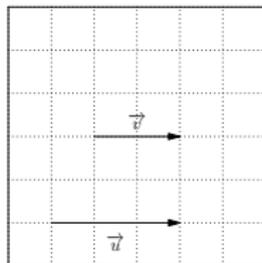
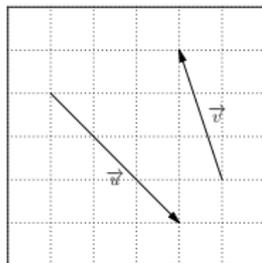
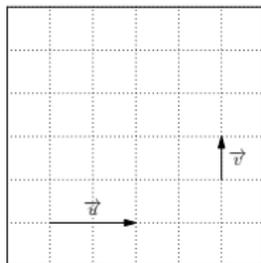
Méthode générale de construction de $\vec{u} + \vec{v}$ (\vec{u} et \vec{v} non nuls) :



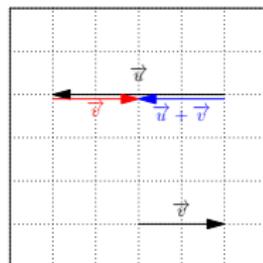
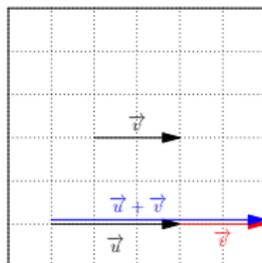
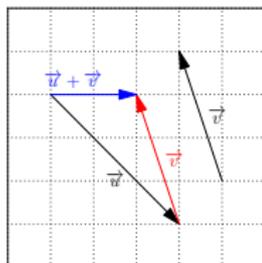
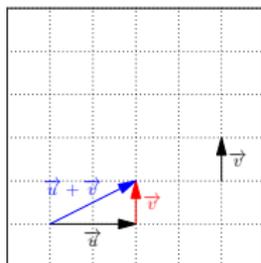
- 1 On trace le représentant de \vec{v} ayant pour origine l'extrémité de \vec{u} (« on met le deuxième vecteur au bout du premier »).
- 2 Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ s'obtient en joignant l'origine de \vec{u} avec l'extrémité du représentant de \vec{v} que l'on vient de placer au bout de \vec{u} .

2. Somme et différence de deux vecteurs

Exemple(s)

1) Tracer $\vec{u} + \vec{v}$ dans les cas suivants (*) :

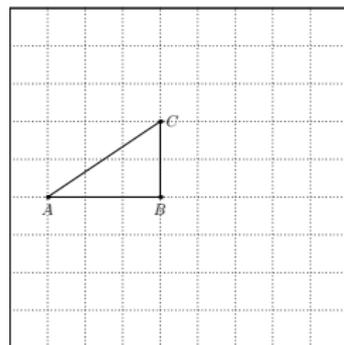
Correction :



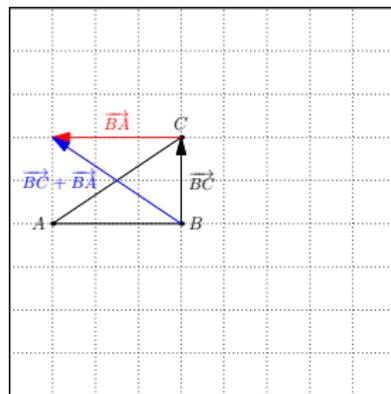
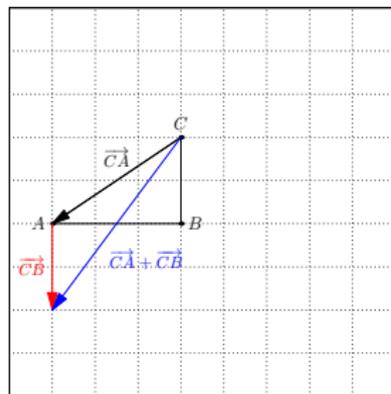
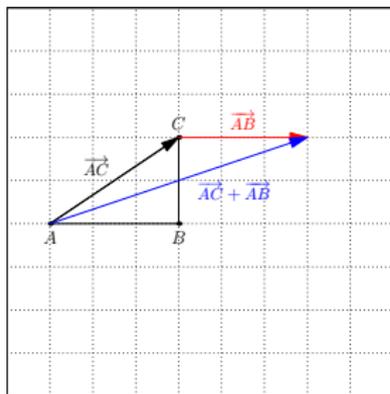
2. Somme et différence de deux vecteurs

Exemple(s)

2) Tracer $\vec{AC} + \vec{AB}$, $\vec{CA} + \vec{CB}$ et $\vec{BC} + \vec{BA}$ dans la figure ci-contre (*) :



Correction :



2. Somme et différence de deux vecteurs

Conséquence de la définition de la somme de deux vecteurs :

Relation de Chasles : Pour tous points A , B et C , on a $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

► Remarques :

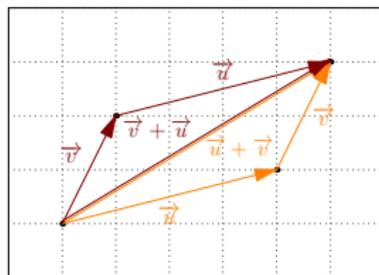
- Quand on remplace $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ par \overrightarrow{AC} , on dit qu'on *simplifie* l'expression.
- Quand on remplace \overrightarrow{AC} par $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, on dit qu'on *décompose* le vecteur \overrightarrow{AC} en passant par le point B .

Propriété(s)

Pour tous vecteurs \vec{u} et \vec{v} , on a :

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}.$$

Démonstration en utilisant un parallélogramme :



2. Somme et différence de deux vecteurs

Propriété(s)

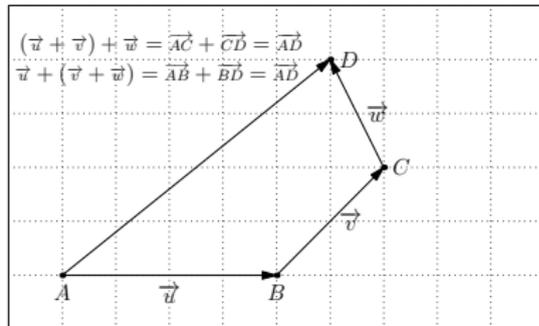
Pour tous vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} , on a :

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}).$$

(on peut donc s'abstenir d'utiliser des parenthèses)

Démonstration :

Soit A un point du plan, B , C et D les points tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{CD} = \vec{w}$



Exemple(s)

Simplifier les expressions suivantes à l'aide de la relation de Chasles :

① $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$ - Réponse : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$

② $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB}$ - Réponse : $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$

③ $\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{AD}$ - Réponse : $\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{BB} = \vec{0}$

2. Somme et différence de deux vecteurs

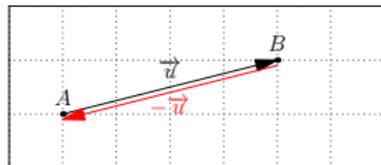
b) Opposé d'un vecteur

Définition

- Étant donné un vecteur non nul \vec{u} de représentant \overrightarrow{AB} .

On appelle **opposé** de \vec{u} , le vecteur noté $-\vec{u}$ de représentant \overrightarrow{BA} .
($-\vec{u}$ a donc même direction et même longueur que \vec{u} mais est de sens contraire)

- Par convention, on pose $-\vec{0} = \vec{0}$.



Conséquences :

$$-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA} \text{ et } \vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0} \text{ (car } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}\text{)}$$

c) Différence de deux vecteurs

Définition

On appelle **différence** des vecteurs \vec{u} et \vec{v} , le vecteur noté $\vec{u} - \vec{v}$ égal à $\vec{u} + (-\vec{v})$.

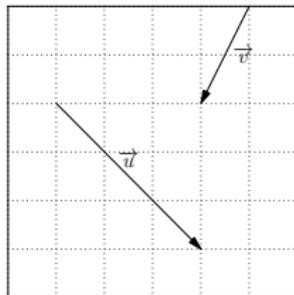
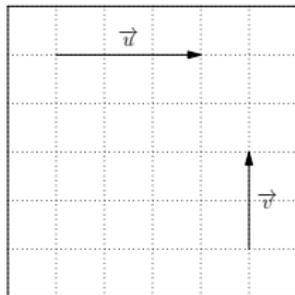
Conséquence :

$$\vec{u} - \vec{u} = \vec{0}$$

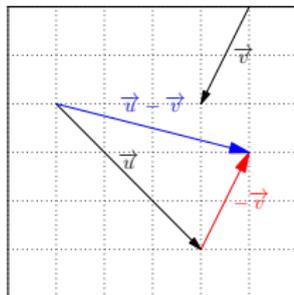
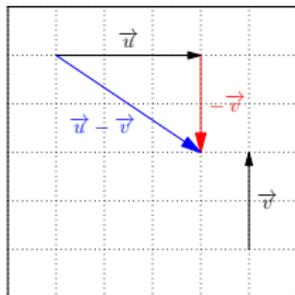
2. Somme et différence de deux vecteurs

Exemple(s)

1) Tracer $\vec{u} - \vec{v}$ dans les cas suivants (*) :



Correction : on place l'opposé de \vec{v} au bout de \vec{u}



2. Somme et différence de deux vecteurs

Exemple(s)

2) Simplifier les expressions suivantes :

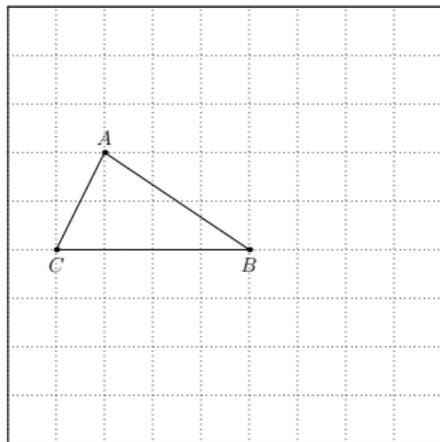
① $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ - Réponse : $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$

② $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$ - Réponse : $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DC}$

③ $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}$ - Réponse : $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DB}$
 $= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$.

3) Placer les points M et P tels que

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \text{ et } \overrightarrow{PB} = -\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}. (*)$$

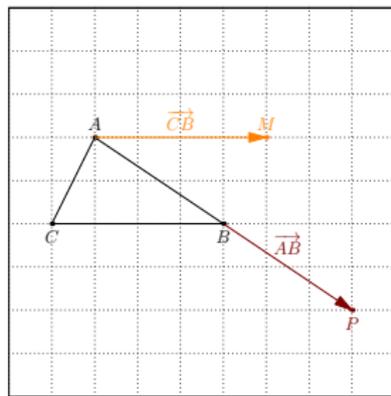


Correction :

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$$

$$\overrightarrow{PB} = -\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA} \Leftrightarrow$$

$$\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AB}$$

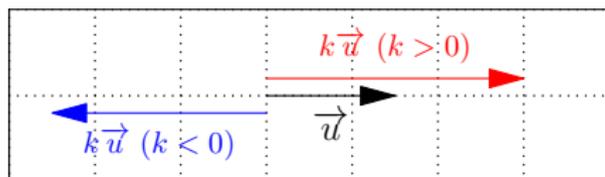


3. Multiplication d'un vecteur par un réel

Définition

Pour tout vecteur \vec{u} et pour tout réel k , on appelle **produit de \vec{u} par k** , le vecteur noté $k\vec{u}$ tel que :

- Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et si $k > 0$ alors $k\vec{u}$ a même direction et même sens que \vec{u} et longueur de $(k\vec{u}) = k \times (\text{longueur de } \vec{u})$.
- Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et si $k < 0$ alors $k\vec{u}$ a même direction que \vec{u} , est de sens contraire de celui de \vec{u} et longueur de $(k\vec{u}) = (-k) \times (\text{longueur de } \vec{u})$.

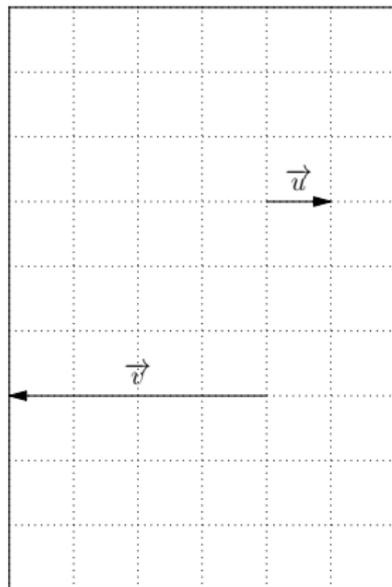


- Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou si $k = 0$, alors $k\vec{u} = \vec{0}$.

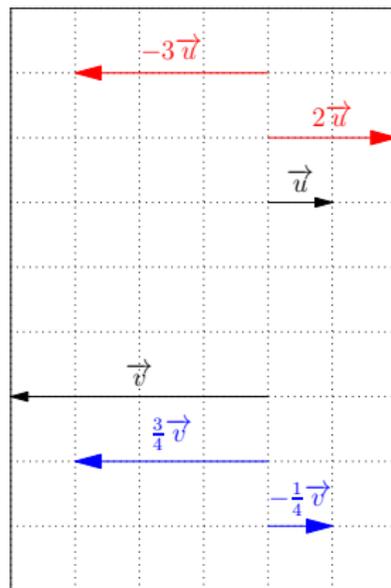
3. Multiplication d'un vecteur par un réel

Exemple(s)

1) Construire $2\vec{u}$, $-3\vec{u}$, $\frac{3}{4}\vec{v}$ et $-\frac{1}{4}\vec{v}$ dans la figure ci-dessous (*):



Correction :

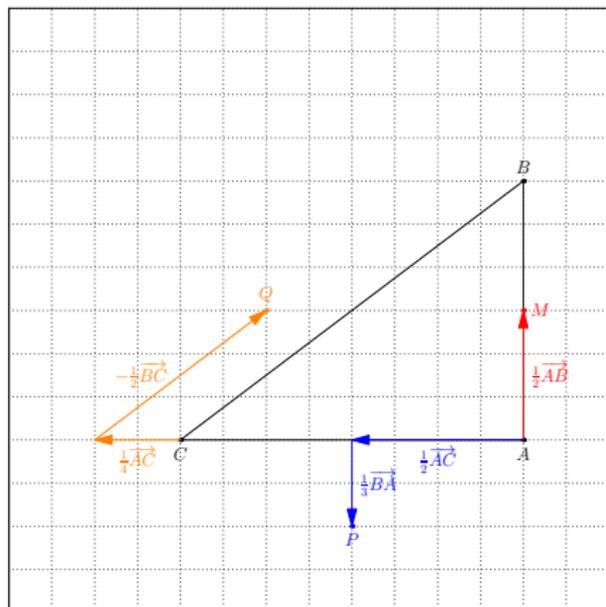


3. Multiplication d'un vecteur par un réel

Exemple(s)

2) Dans la figure ci-contre (*) :

- Pour placer le point M tel que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, on a construit $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ en partant de A .
- Pour placer le point P tel que $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$, on a construit $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ en partant de A , puis on a placé au bout un représentant de $\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$.
- Pour placer le point Q tel que $\overrightarrow{CQ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, on a construit $\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ en partant de C , puis on a placé au bout un représentant de $-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.



3. Multiplication d'un vecteur par un réel

Propriété(s)

Pour tous vecteurs \vec{u} et \vec{v} et pour tous réels k et k' :

- $k(k'\vec{u}) = (kk')\vec{u}$ - exemple : $2(4\vec{u}) = (2 \times 4)\vec{u} = 8\vec{u}$
- $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$ - exemple : $-6(\vec{u} + \vec{v}) = -6\vec{u} - 6\vec{v}$
- $(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$ - exemple : $2\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{u} = (2 - \frac{1}{2})\vec{u} = \frac{3}{2}\vec{u}$

Exemple(s)

Simplifier les expressions suivantes :

- $\frac{1}{2}\vec{u} - \frac{1}{3}\vec{u} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{3}\vec{u} - \frac{1}{3} \times \frac{2}{2}\vec{u} = \frac{3}{6}\vec{u} - \frac{2}{6}\vec{u} = \frac{1}{6}\vec{u}$
- $3\vec{u} - 2\vec{v} - \vec{u} - 2(\vec{u} - \vec{v}) = 2\vec{u} - 2\vec{v} - 2\vec{u} + 2\vec{v} = \vec{0}$
- $3(2\vec{u} - \vec{v}) - 2(3\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}) = 6\vec{u} - 3\vec{v} - 6\vec{u} - \vec{v} = -4\vec{v}$

4. Vecteurs colinéaires - Droites parallèles - Points alignés

Définition

Deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont dits **colinéaires** s'il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.

► **Remarque** : Pour tout vecteur \vec{u} , $0\vec{u} = \vec{0}$. Donc le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs.

Propriété(s)

Dire que deux vecteurs non nuls ont même direction équivaut à dire qu'ils sont colinéaires.

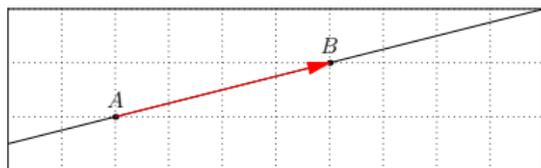
En effet :

- Si \vec{u} et \vec{v} ont la même direction alors on a $\vec{u} = k\vec{v}$ avec $k = \frac{\text{longueur de } \vec{u}}{\text{longueur de } \vec{v}}$ s'ils sont de même sens et avec $k = -\frac{\text{longueur de } \vec{u}}{\text{longueur de } \vec{v}}$ s'ils sont de sens contraire. Ils sont donc bien colinéaires.
- Et si on a $\vec{u} = k\vec{v}$ alors ils sont, par définition de la multiplication d'un vecteur par un réel, de même direction.

4. Vecteurs colinéaires - Droites parallèles - Points alignés

Définition

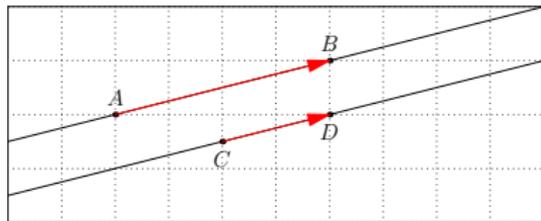
On appelle **vecteur directeur** d'une droite tout vecteur formé par deux points distincts de la droite. (*c'est un vecteur qui « indique » la direction de la droite*)



Propriété(s)

Dire que deux droites sont parallèles équivaut à dire qu'elles ont des vecteurs directeurs colinéaires.

► **Application** : Montrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles équivaut à montrer qu'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$.



4. Vecteurs colinéaires - Droites parallèles - Points alignés

Exemple(s)

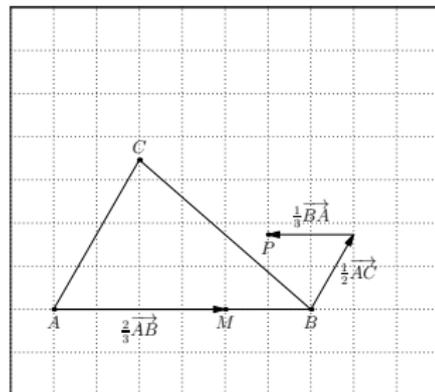
Dans la figure ci-contre (*) :

- ① Placer les points M et P tels que $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$.

- ② Montrer que les droites (MP) et (AC) sont parallèles.
Réponse : on va montrer que les vecteurs \overrightarrow{MP} et \overrightarrow{AC} sont colinéaires. Pour cela, on cherche à décomposer \overrightarrow{MP} avec la relation de Chasles en passant par les points avec lesquels M et P sont définis dans l'énoncé. M est donné dans l'énoncé avec A et P est donné avec B , d'où la décomposition que l'on va utiliser :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MP} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP} \\ &= -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} \\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\ &= \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

Les vecteurs \overrightarrow{MP} et \overrightarrow{AC} sont colinéaires car on a montré qu'il existait un réel k tel que $\overrightarrow{MP} = k\overrightarrow{AC}$. Ce qui prouve que les droites (MP) et (AC) sont parallèles.



4. Vecteurs colinéaires - Droites parallèles - Points alignés

Propriété(s)

Si les vecteurs non nuls \vec{AB} et \vec{AC} sont colinéaires alors on peut en déduire que les points A , B et C sont alignés (puisque cela implique que les droites (AB) et (AC) sont parallèles).

Exemple(s)

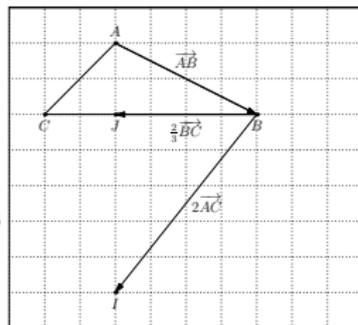
Dans la figure ci-contre (*) :

- Placer les points I et J tels que $\vec{AI} = \vec{AB} + 2\vec{AC}$ et $\vec{BJ} = \frac{2}{3}\vec{BC}$.
- Montrer que les points A , I et J sont alignés.

Réponse : on va montrer que les vecteurs \vec{AJ} et \vec{AI} sont colinéaires. Pour cela, on cherche à décomposer \vec{AJ} avec la relation de Chasles en passant par le point B avec lequel J est défini dans l'énoncé :

$$\begin{aligned}\vec{AJ} &= \vec{AB} + \vec{BJ} = \vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{BC} \\ &= \vec{AB} + \frac{2}{3}(\vec{BA} + \vec{AC}) = \vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{BA} + \frac{2}{3}\vec{AC} = \frac{3}{3}\vec{AB} - \frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AC} \\ &= \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AC} = \frac{1}{3}(\vec{AB} + 2\vec{AC}) = \frac{1}{3}\vec{AI}\end{aligned}$$

Les vecteurs \vec{AJ} et \vec{AI} sont colinéaires car on a montré qu'il existait un réel k tel que $\vec{AJ} = k\vec{AI}$. Ce qui prouve que les points A , I et J sont alignés.



Fin du chapitre