Fonctions numériques

▶ Exercice n°1

1. image de $3 = f(3) = \dfrac{3+1}{3-2} = 4$
   image de $5 = f(5) = \dfrac{5+1}{5-2} = 2$
2. Ce sont les réels x dans $]2;+\infty[$ tels que $f(x) = 3$.
   $f(x) = 3 \Leftrightarrow \dfrac{x+1}{x-2} = 3 \Leftrightarrow x+1 = 3(x-2) \Leftrightarrow x+1 = 3x-6 \Leftrightarrow 1+6 = 3x-x \Leftrightarrow 7 = 2x \Leftrightarrow x = \dfrac{7}{2}$ qui est bien dans $]2;+\infty[$.
   $\dfrac{7}{2}$ est le seul antécédent de 3 par f.

▶ Exercice n°2

1. $f(-1) = -8$ (ordonnée du point de la courbe d'abscisse -1)
   $f(0) = -3$ (ordonnée du point de la courbe d'abscisse 0)
   $f(1) = 0$ (ordonnée du point de la courbe d'abscisse 1)
2. Les antécédents de -3 par f sont 0 et 4 (abscisses des points de la courbe d'ordonnée -3)
3. $f(x)$ varie dans $[-8;1]$ quand x varie dans $[-1;5]$ car cela correspond aux ordonnées des points de la courbe.

▶ Exercice n°3

- *Proposition 1 :* vraie, car f est décroissante sur $[0;4]$
- *Proposition 2 :* fausse. $f(-3)$ n'existe pas car f n'est définie que sur $[0;7]$
- *Proposition 3 :* fausse. $f(x)$ ne peut s'annuler qu'une seule fois : sur l'intervalle $[0\,;\,4]$ quand $f(x)$ passe de 2 à -3.
- *Proposition 4 :* vraie. Pour tout x de $[0;7]$, on a bien $f(x) \geqslant -3$.

▶ Exercice n°4

Déterminer si la fonction f est paire, impaire ou ni l'une ni l'autre dans les cas suivants

1. $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0 et pour tout x, $f(-x) = 3(-x) = -3x = -f(x)$. Donc f est impaire.
2. $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0 et pour tout x, $f(-x) = 4-(-x)^2 = 4-x^2 = f(x)$. Donc f est paire.
3. $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0 et pour tout x, $f(-x) = (-x)^2+(-x) = x^2-x$ qui est ni égal à $f(x)$, ni égal à $-f(x)$. Donc, f est ni paire, ni impaire.
4. $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0 et pour tout x, $f(-x) = \dfrac{3(-x)}{(-x)^2+4} = -\dfrac{3x}{x^2+4} = -f(x)$. Donc f est impaire.
5. $]-\infty\,;\,1[\bigcup]1\,;\,+\infty[$ n'est pas symétrique par rapport à 0, donc f est ni paire, ni impaire.

▶ Exercice n°5

x	-8		-2		0		2		8
$f(x)$	-5	↗	1	↘	-2	↗	1	↘	-5

▶ Exercice n°6

x	-6		-3		0		3		6
$f(x)$	-3	↗	1	↘	0	↘	-1	↗	3

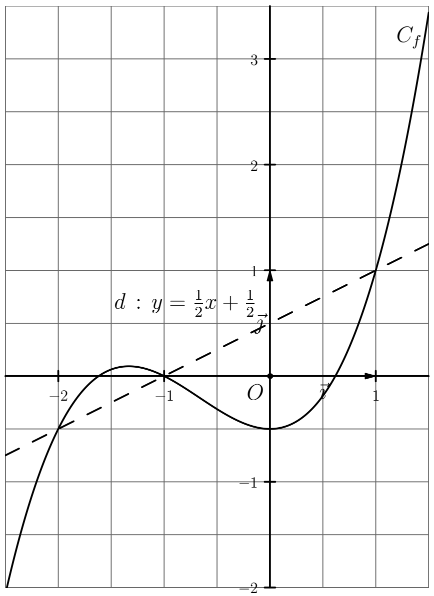
▶ Exercice n°7

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2+4$.

1. image de $-1 = f(-1) = 3\times(-1)^2+4 = 7$.
2. Ce sont les réels x tels que $f(x) = 16 \Leftrightarrow 3x^2+4 = 16 \Leftrightarrow 3x^2 = 12 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -2$. 2 et -2 sont les antécédents de 16 par f.
3. $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0 et pour tout x, $f(-x) = 3(-x)^2+4 = 3x^2+4 = f(x)$. Donc f est bien paire.
4. a) $f(b)-f(a) = \left(3b^2+4\right)-\left(3a^2+4\right) = 3b^2+4-3a^2-4 = 3b^2-3a^2 = 3\left(b^2-a^2\right) = 3(b-a)(b+a)$.
   b) Pour tous a et b dans $[0\,;+\infty[$ tels que $b-a>0$, on a $f(b)-f(a) = 3\underbrace{(b-a)}_{+}\times\underbrace{(b+a)}_{\substack{+\\ \text{car } b>0 \text{ et } a>0}} > 0$. Donc f est croissante sur $[0\,;+\infty[$.
   c) Par symétrie de la courbe par rapport à l'axe des ordonnées, f doit être décroissante sur $]-\infty\,;\,0]$.
   d)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	$f(0)=4$	$\nearrow$

▶ Exercice n°8



1. a) $S=\{1\}$
   b) $S=\{-2;0\}$
   c) $S=\{-2;-1;1\}$ (abscisses des points d'intersection avec la droite d)
2. a) $S=\left[1\,;\,\frac{3}{2}\right]$
   b) $S=\left]-\frac{5}{2}\,;\,-2\right[$
   c) $S=\left[-\frac{5}{2}\,;\,-2\right]\cup\{0\}$
   d) $S=[-2\,;\,-1]\cup\left[1\,;\,\frac{3}{2}\right]$

▶ Exercice n°9

Cela revient à déterminer l'équation réduite de la droite d passant par le point A d'abscisse $x_A=1$ et d'ordonnée $y_A=-2$ et par le point B d'abscisse $x_B=4$ et d'ordonnée $y_B=7$.
On a donc $m=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\dfrac{7-(-2)}{4-1}=3$. L'équation réduite de d est donc de la forme $y=3x+p$.
On doit avoir $y_A=3x_A+p\Leftrightarrow -2=3\times 1+p\Leftrightarrow p=-5$.
L'équation réduite de d est $y=3x-5$ et f est définie par $f(x)=3x-5$.

▶ Exercice n°10

1. Cela revient à déterminer l'équation réduite de la droite d passant par le point A d'abscisse $x_A=0$ et d'ordonnée $y_A=32$ et par le point B d'abscisse $x_B=100$ et d'ordonnée $y_B=212$.
   On a donc $m=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\dfrac{212-32}{100-0}=1{,}8$. L'équation réduite de d est donc de la forme $y=1{,}8x+p$.
   On doit avoir $y_A=1{,}8x_A+p\Leftrightarrow 32=1{,}8\times 0+p\Leftrightarrow p=32$.
   L'équation réduite de d est $y=1{,}8x+32$ et f est définie par $f(x)=1{,}8x+32$.
2. Valeur en degrés farenheit de 22° celsius $=f(22)=1{,}8\times 22+32=71{,}6$

▶ Exercice n°11

Pour $x>-2$, on étudie le signe de $f(x)-5$:

$$f(x)-5=\frac{5x}{x+2}-5\times\frac{x+2}{x+2}=\frac{5x-5x-10}{x+2}=\frac{\overbrace{-10}^{-}}{\underbrace{x+2}_{+}}<0$$

Donc, C_f est en dessous de la droite D d'équation $y=5$ sur $]-2\,;+\infty[$.

▶ Exercice n°12

Pour $x<-1$, on étudie le signe de $f(x)-x$:

$$f(x)-x=\frac{x}{x+1}-x\times\frac{x+1}{x+1}=\frac{x-x^2-x}{x+1}=\frac{\overbrace{-x^2}^{-}}{\underbrace{x+1}_{-}}>0$$

Donc, C_f est au dessus de la droite D d'équation $y=x$ sur $]-\infty\,;-1[$.

▶ Exercice n°13

1. Au bout d'un an : $P(1)=\dfrac{50+60}{1+0{,}05}\approx 104{,}8$ milliers
   Au bout de 50 ans : $P(50)=\dfrac{50+60\times 50}{1+0{,}05\times 50}\approx 871{,}4$ milliers
2. Cela revient à chercher t tel que $P(t)=4\times 50\Leftrightarrow\dfrac{50+60t}{1+0{,}05t}=200\Leftrightarrow 50+60t=200+10t\Leftrightarrow 60t-10t=200-50\Leftrightarrow 50t=150\Leftrightarrow t=3$ ans.
3.

```
Variables: t
DEBUT_ALGORITHME
  t ← 5
  TANT_QUE (t ⩽ 100) FAIRE
    AFFICHER (50+60t)/(1+0,05t)
    t ← t+5
    FIN_TANT_QUE
FIN_ALGORITHME
```

4. Pour tout $t > 0$, $P(t) - 1200 = \dfrac{50+60t}{1+0{,}05t} - 1200 \times \dfrac{1+0{,}05t}{1+0{,}05t} = \dfrac{50+60t-1200-60t}{1+0{,}05t} = \dfrac{\overbrace{-1150}^{-}}{\underbrace{1+0{,}05t}_{+}} < 0$. On en déduit que $P(t)$ est toujours inférieur à 1200 et que le nombre de poissons ne dépassera jamais 1200 milliers.

▶ Exercice n°14

x	0		1		$+\infty$
Signe de x	0	$+$	|	$+$	
Signe de $x-1$	|	$-$	0	$+$	
Signe de $x(x-1)=x^2-x=g(x)-f(x)$	0	$-$	0	$+$	
Position relative de C_g et C_f		C_g en dessous de C_f		C_g au dessus de C_g	

x	0		1		$+\infty$
Signe de x^2	0	$+$	|	$+$	
Signe de $x-1$	|	$-$	0	$+$	
Signe de $x^2(x-1)=x^3-x^2=h(x)-g(x)$	0	$-$	0	$+$	
Position relative de C_h et C_g		C_h en dessous de C_g		C_h au dessus de C_g	

▶ Exercice n°15

1. Si $x=25$, on doit avoir $25+y+25=360 \Leftrightarrow y=310$. On a alors, $S(x)=x\times y=25\times 310=7750\,\text{m}^2$.
   Si $x=42$, on doit avoir $42+y+42=360 \Leftrightarrow y=276$. On a alors, $S(x)=x\times y=42\times 276=11592\,\text{m}^2$.
2. On doit avoir $x+y+x=360 \Leftrightarrow y=360-2x$.
   Et donc, $S(x)=x\times y=x(360-2x)=-2x^2+360x$.
3. $S(x) = -2\left[x^2-180x\right] = -2\left[(x-90)^2-90^2\right] = -2\left[(x-90)^2-8100\right] = -2(x-90)^2+16200$. Il faut $a=90$ et $b=16200$.
4. $-2(x-90)^2$ est toujours négatif et sera maximal quand sa valeur sera nulle, c'est à dire pour $x=90$. $S(x)=-2(x-90)^2+16200$ sera donc aussi maximal pour $x=90$ et le maximum sera de $16200\,\text{m}^2$.

▶ Exercice n°16

1. « Si f est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$ alors il existe au moins un x tel que $f(x)$ soit négatif ».
2. « Si pour tout x, $f(x)$ est positif alors f est croissante sur $\mathbb{R}$ ».
3. La proposition est fausse. Contre-exemple : f définie par $f(x)=x$ est croissante sur $\mathbb{R}$, mais $f(x)$ est négatif si $x<0$.
4. La réciproque est fausse. Contre-exemple : f définie par $f(x)=x^2$ n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$.