

Produit scalaire : exercices

Les réponses aux questions sont disponibles à la fin du document

Le plan est muni d'un repère orthonormal.

Exercice 1 :

On considère les vecteurs \vec{u} et \vec{v} tels que : $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$.

Calculer :

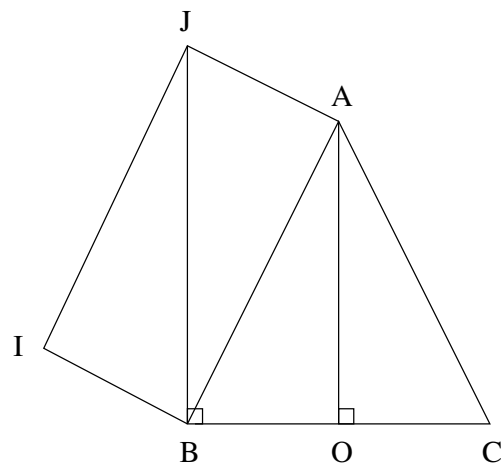
- 1) $(2\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$
- 2) $(\vec{u} + 2\vec{v})^2$
- 3) $(-3\vec{u} + \vec{v})^2$
- 4) $(\vec{u} - \vec{v})^2 - (\vec{u} + \vec{v})^2$

Exercice 2 :

Dans la figure ci-dessous : ABC est un triangle isocèle en A , $AIBJ$ est un parallélogramme et $BC = 4$.

Calculer les produits scalaires suivants :

- 1) $\vec{BC} \cdot \vec{BA}$
- 2) $\vec{BC} \cdot \vec{JC}$
- 3) $\vec{BC} \cdot \vec{AJ}$
- 4) $\vec{BC} \cdot \vec{IA}$
- 5) $\vec{BO} \cdot \vec{BI}$
- 6) $\vec{BC} \cdot \vec{CI}$

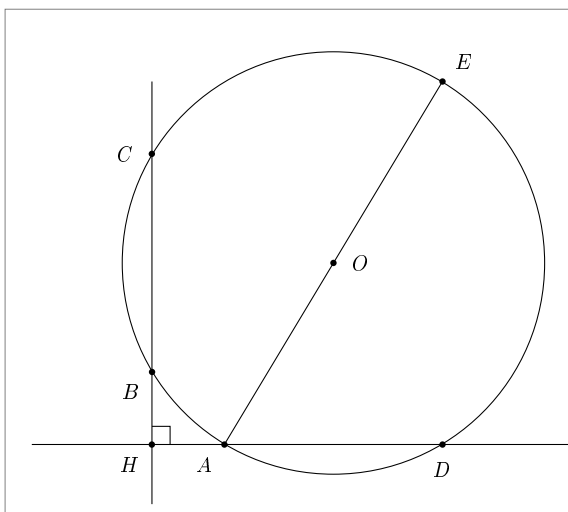


Exercice 3 :

Soit C un cercle de centre O et A , B et C trois points distincts de C .

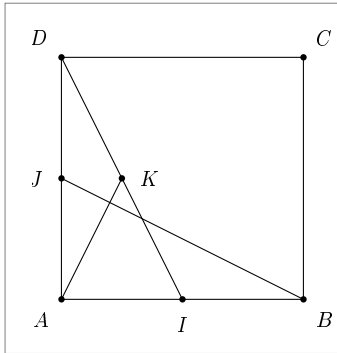
On note H le projeté orthogonal de A sur la droite (BC) , D l'intersection entre la hauteur (AH) et le cercle C et E le point du cercle diamétralement opposé à A .

Montrer que $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = \vec{AC} \cdot \vec{AD} = \vec{AE} \cdot \vec{AH}$.



Exercice 4 :

Soit $ABCD$ un carré, I le milieu de $[AB]$, J le milieu de $[AD]$ et K le milieu de $[ID]$.
Montrer que les droites (AK) et (BJ) sont perpendiculaires.



Exercice 5 :

On considère les points $A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

- Déterminer une équation de la tangente en B au cercle C de centre A passant par B .
- Déterminer une équation du cercle C .

Réponses exercice 1 :

On développe et on utilise que $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2 = 4$, $\vec{v}^2 = \|\vec{v}\|^2 = 9$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$.

- $(2\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = -2$
- $(\vec{u} + 2\vec{v})^2 = 44$
- $(-3\vec{u} + \vec{v})^2 = 39$
- $(\vec{u} - \vec{v})^2 - (\vec{u} + \vec{v})^2 = -4$

Réponses exercice 2 :

- $\vec{BC} \cdot \vec{BA} = \vec{BC} \cdot \vec{BQ} = 4 \times 2 = 8$
- $\vec{BC} \cdot \vec{JC} = \vec{BC} \cdot \vec{BC} = 4^2 = 16$
- $\vec{BC} \cdot \vec{AJ} = \vec{BC} \cdot \vec{OB} = -4 \times 2 = -8$
- $\vec{BC} \cdot \vec{IA} = \vec{BC} \cdot (\vec{IB} + \vec{BA}) = \vec{BC} \cdot \vec{IB} + \vec{BC} \cdot \vec{BA} = \vec{BC} \cdot \vec{JA} + 4 \times 2 = 4 \times 2 + 8 = 16$
- $\vec{BO} \cdot \vec{BI} = \vec{BO} \cdot \vec{AJ} = \vec{BO} \cdot \vec{OB} = -2^2 = -4$
- $\vec{BC} \cdot \vec{CI} = \vec{BC} \cdot (\vec{CB} + \vec{BI}) = \vec{BC} \cdot \vec{CB} + \vec{BC} \cdot \vec{BI} = -4^2 + \vec{BC} \cdot \vec{AJ} = -16 - 4 \times 2 = -24$

Réponses exercice 3 :

$\vec{AB} \cdot \vec{AD} = \vec{AH} \cdot \vec{AD} = \text{car } \vec{AB} \text{ se projette orthogonalement en } \vec{AH} \text{ sur } (AD).$

$\vec{AC} \cdot \vec{AD} = \vec{AH} \cdot \vec{AD} = \text{car } \vec{AC} \text{ se projette orthogonalement en } \vec{AH} \text{ sur } (AD).$

Donc, on a bien $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = \vec{AC} \cdot \vec{AD}$.

De plus, $\vec{AE} \cdot \vec{AH} = (\vec{AD} + \vec{DE}) \cdot \vec{AH} = \vec{AD} \cdot \vec{AH} + \vec{DE} \cdot \vec{AH} = \vec{AD} \cdot \vec{AH} + 0$ (le triangle ADE est rectangle en D).

Conclusion : $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = \vec{AC} \cdot \vec{AD} = \vec{AE} \cdot \vec{AH}$.

Réponses exercice 4 :

$$\begin{aligned}\vec{AK} \cdot \vec{BJ} &= (\vec{AJ} + \vec{JK}) \cdot (\vec{BA} + \vec{AJ}) = (\vec{AJ} + \frac{1}{2}\vec{AI}) \cdot (\vec{BA} + \vec{AJ}) \\ \vec{AJ} \cdot \vec{BA} + \vec{AJ} \cdot \vec{AJ} + \frac{1}{2}\vec{AI} \cdot \vec{BA} + \frac{1}{2}\vec{AI} \cdot \vec{AJ} &= 0 + \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}a^2 + 0 = 0\end{aligned}$$

Les droites (AK) et (BJ) sont bien perpendiculaires.

Réponses exercice 5 :

a) $\vec{AB} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal de la tangente qui admet donc une équation de la forme : $-3x + 2y + c = 0$.

La tangente doit passer par B . On en déduit que $-3 \times (-1) + 2 \times 3 + c = 0 \Leftrightarrow c = -9$.

Une équation de la tangente est donc : $-3x + 2y - 9 = 0$.

b) Le rayon du cercle est égal à la distance AB . Or, $AB = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13}$.

Une équation du cercle est donc $(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = 13$, c'est à dire $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 13$.