Complément sur les fonctions

▶ Exercice n°1

Soit f la fonction définie sur $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x^2-3}{x-2}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. Calculer les images par f de 3 et -1 .
2. Déterminer le(s) antécédent(s) éventuel(s) par f de 0.
3. Déterminer le(s) antécédent(s) éventuel(s) par f de 4.
4. Déterminer les réels m qui n'admettent qu'un unique antécédent par f.
5. Soit g la fonction définie sur $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$ par $g(x)=2x$ et C_g sa courbe représentative dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.
   Étudier la position relative des courbes C_f et C_g sur $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$.

▶ Exercice n°2

On considère la proposition suivante : « Si f est une fonction croissante sur un intervalle I alors, pour tout x de I, $f(x)$ est positif ».

1. Exprimer la **négation** de cette proposition.
2. Exprimer la **réciproque** de cette proposition.
3. La proposition est-elle vraie ?
4. La réciproque de la proposition est-elle vraie ?

▶ Exercice n°3

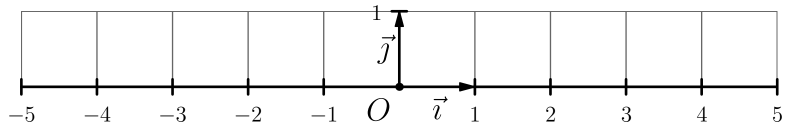
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On note p et i les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $p(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ et $i(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$.

1. Montrer que p est une fonction paire et que i est une fonction impaire.
2. Montrer que pour tout x, $f(x)=p(x)+i(x)$.

▶ Exercice n°4

Tracer dans le repère ci-dessous la courbe représentative de la fonction f telle que :

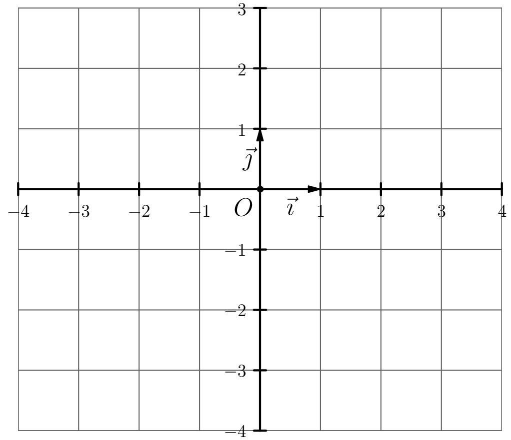
- $f(x)=x$ pour tout x de $[0;1[$.
- f est paire.
- f est périodique de période 2.



▶ Exercice n°5

Pour tout réel x, il existe un unique entier relatif n tel que $n \leqslant x < n+1$. Cet entier est appelé partie entière de x et il est noté $E(x)$.

1. Déterminer $E(2{,}4)$, $E(3)$, $E(-1{,}5)$ et $E(-3{,}7)$.
2. Représenter la courbe de la fonction partie entière sur $[-4;4[$ dans le repère ci-dessous :



3. Montrer que pour tout réel x, $E(x+1)=E(x)+1$.
4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x-E(x)$. Montrer que f est périodique de période 1.

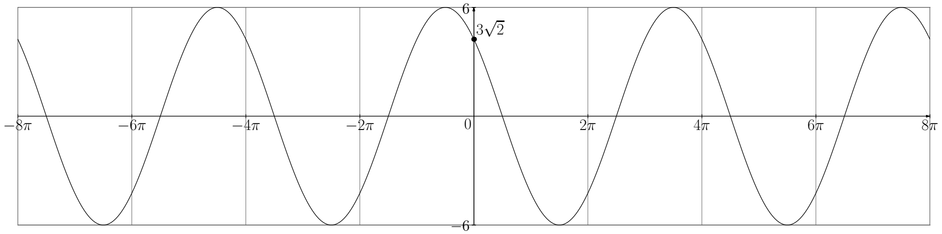
▶ Exercice n°6

Déterminer une période de la fonction f dans les cas suivants :

1. $f(x)=\sin(2x)$.
2. $f(x)=3\cos\left(\dfrac{1}{2}x\right)$.
3. $f(x)=3\cos(2x)-\sin x$.
4. $f(x)=2\cos\left(\dfrac{1}{3}x\right)-\cos\left(\dfrac{1}{4}x\right)$.

▶ Exercice n°7

La courbe représentative d'une fonction périodique f est donnée ci-dessous :



1. À l'aide du graphique, déterminer la (plus petite) période T de la fonction f.
2. La fonction f est en fait de la forme $f(x) = r\cos(\omega x + \varphi)$ avec $\varphi \in \left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

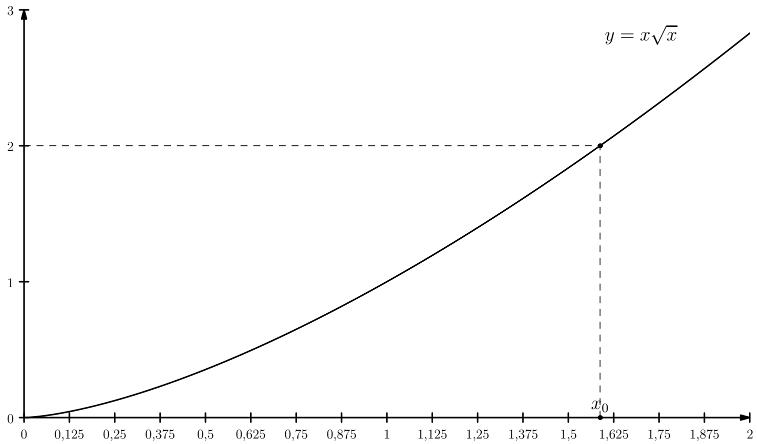
   a) En utilisant que $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$, déterminer la valeur de ω.

   b) En utilisant que, pour tout x, $-1 \leqslant \cos(\omega x + \varphi) \leqslant 1$, déterminer la valeur de r.

   c) En utilisant la valeur de $f(0)$ donnée sur le graphique, déterminer la valeur de φ.

▶ Exercice n°8

On considère la fonction f définie $[0\,;\,2]$ par $f(x) = x\sqrt{x}$ dont la courbe est donnée ci-dessous : *(on admet que f est strictement croissante sur $[0\,;2]$ et que sa courbe ne contient pas de « trous »)*



On cherche à déterminer une valeur approchée du réel x_0 tel que $f(x_0) = 2$ *(comme $f(0 = 0$ et $f(2) = 2\sqrt{2} > 2$, on sait que $x_0 \in [0\,;\,2]$)* .

1. Pour cela, on utilise la méthode dite de la dichotomie qui consiste, à chaque étape, à considérer le milieu de l'intervalle qui contient x_0 :
   - *Étape 1* : On se place dans l'intervalle $[0\,;2]$ dont le milieu est $m = 1$.
     Or, $f(m) = f(1) = 1$ qui est inférieur à 2 donc $x_0 \in [1\,;\,2]$.
   - *Étape 2* : On se place dans l'intervalle $[1\,;2]$ dont le milieu est $m =$.......
     Or, $f(m) = f($........$) =$.......... qui est .... à 2
     donc $x_0 \in$[...........;..........].
   - *Étape 3* : On se place dans l'intervalle [...........;..........] dont le milieu est $m =$.......
     Or, $f(m) = f($........$) =$.......... qui est .... à 2
     donc $x_0 \in$[...........;..........].
   - *Étape 4* : On se place dans l'intervalle [...........;..........] dont le milieu est $m =$.......
     Or, $f(m) = f($........$) =$.......... qui est .... à 2
     donc $x_0 \in$[...........;..........].
2. À partir des résultats obtenus à la question précédente, compléter le tableau suivant :

Étape	Intervalle de départ $[a; b]$	milieu m	$f(m) < 2$?	Nouvel intervalle $[a; b]$
1	$a = 0\,;\,b = 2$	$m = 1$	OUI	$a =$........ ; $b =$........
2	$a =$........ ; $b =$........	$m =$........	...	$a =$........ ; $b =$........
3	$a =$........ ; $b =$........	$m =$........	...	$a =$........ ; $b =$........
4	$a =$........ ; $b =$........	$m =$........	...	$a =$........ ; $b =$........

3. On cherche à automatiser les calculs grâce à un script python. Remplacer les ... ci-dessous par a ou b de façon à ce que le script réponde au problème.

```
from math import *
def f(x):
  return x*sqrt(x)
a=0
b=2
for etape in range(4):
  m=(a+b)/2
  if f(m)<2:
    ...=m
  else:
    ...=m
  print(a,b)
```