

## 1. Définition générale

### Exemple introductif

De façon très générale, une suite numérique est une liste de nombres.

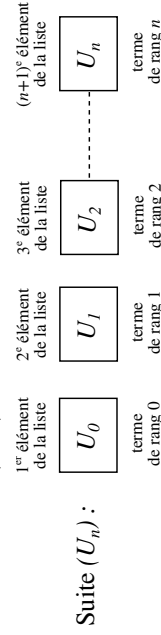
Par exemple, la suite des entiers impairs est 1, 3, 5, 7, ...

Mais pour pouvoir manipuler ces listes de nombres, il faut pouvoir numéroter et désigner leurs éléments. Et comme souvent, en mathématiques, on commence à numéroter à partir de 0. Ainsi notre liste des entiers impairs devient, en la formalisant, la suite  $(U_n)$  définie par :  $U_0 = 1, U_1 = 3, U_2 = 5, U_3 = 7, \dots$

- Le 1<sup>er</sup> élément de la liste  $U_0 = 1$  est appelé **terme de rang 0** de la suite  $(U_n)$  ;
- Le 2<sup>e</sup> élément de la liste  $U_1 = 3$  est appelé **terme de rang 1** de la suite  $(U_n)$  ;
- Le 3<sup>e</sup> élément de la liste  $U_2 = 5$  est appelé **terme de rang 2** de la suite  $(U_n)$  et ainsi de suite...

### Définition

Une suite  $(U_n)$  est une liste infinie de nombres que l'on peut numéroter de la façon suivante :



### Remarque(s)

- Une suite ne peut-être définie qu'à partir d'un certain rang  $n_0$ . Elle est alors notée  $(U_n)_{n \geq n_0}$ .
- Il existe plusieurs façons de générer des listes de nombres et donc de définir des suites.

*Note : Pour tout le reste du chapitre,  $n$  désigne un entier positif.*

## 2. Suites définies de façon explicite

### a) Définition

#### Définition

Une suite  $(U_n)$  est dite définie de **façon explicite** si on connaît une formule permettant de calculer directement n'importe quel terme  $U_n$  en fonction de  $n$ . (cela revient à dire qu'il existe une fonction  $f$  définie sur  $[0; +\infty[$  telle que, pour tout entier positif  $n$ , on ait  $U_n = f(n)$ )

#### Exemple(s)

• **Exemple 1** : Soit  $(U_n)$  la suite définie par  $U_n = 2n + 3$ . On a :

$$U_0 = 2 \times 0 + 3 = 3$$

$$U_1 = 2 \times 1 + 3 = 5$$

$$U_{10} = 2 \times 10 + 3 = 23$$

$$U_{n+1} = 2(n+1) + 3 = 2n + 5$$

• **Exemple 2** : Soit  $(U_n)$  la suite définie par  $U_n = \frac{6}{n+1}$ . On a :

$$U_0 = \frac{6}{0+1} = 6$$

$$U_1 = \frac{6}{1+1} = 3$$

$$U_2 = \frac{6}{2+1} = 2$$

$$U_3 = \frac{6}{3+1} = 1,5$$

$$U_4 = \frac{6}{4+1} = 1,2$$

$$U_{n+1} = \frac{6}{(n+1)+1} = \frac{6}{n+2}$$

## 2. Suites définies de façon explicite

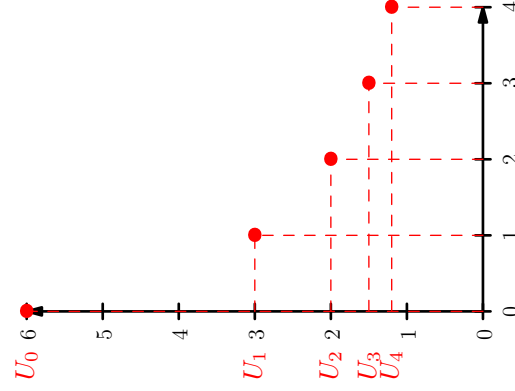
### b) Représentation graphique d'une suite explicite

#### Principe

Dans un repère orthogonal, la représentation graphique d'une suite  $(U_n)$  se compose de l'ensemble des points isolés **d'abscisse  $n$  et d'ordonnée  $U_n$** . (les points ne sont normalement pas reliés)

#### Exemple(s)

Représentation graphique des 5 premiers termes de la suite  $(U_n)$  définie par  $U_n = \frac{6}{n+1}$ .

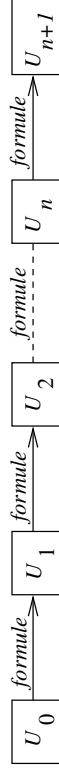


### 3. Suites définies de façon récurrente

#### a) Principe et définition

##### Définition

Une suite  $(U_n)$  est dite définie de **façon récurrente** lorsqu'on connaît son premier terme et qu'une relation (dite de récurrence) permet de calculer un terme à partir du précédent (ou des précédents). Cette relation entre un terme et le terme précédent se formalise généralement avec une formule donnant  $U_{n+1}$  en fonction de  $U_n$ .



##### Exemple(s)

• **Exemple 1** : Soit  $(U_n)$  définie par  $U_0 = 2$  et  $U_{n+1} = 3 + U_n$  (ce qui veut dire qu'un terme est égal trois plus le terme précédent). On a :

- $U_1 = 3 + U_0$  (« 3 + *terme précédent* »), donc  $U_1 = 3 + 2 = 5$ .
- $U_2 = 3 + U_1$  (« 3 + *terme précédent* »), donc  $U_2 = 3 + 5 = 8$ .
- $U_3 = 3 + U_2$  (« 3 + *terme précédent* »), donc  $U_3 = 3 + 8 = 11$ .

Script python permettant de calculer  $U_n$  :

```
n=int(input("n:"))
U=2
for i in range(n) :
    U=3+U
print(U)
```

### 3. Suites définies de façon récurrente

##### Exemple(s)

• **Exemple 2** : Soit  $(U_n)$  définie par  $U_0 = 3$  et  $U_{n+1} = 1 + 2U_n$  (ce qui veut dire qu'un terme est égal à un plus deux fois le terme précédent).

1. Compléter les calculs suivants :

- $U_1 = 1 + 2U_0 = \dots$
- $U_2 = 1 + 2U_1 = \dots$
- $U_3 = 1 + 2U_2 = \dots$

2. Compléter le script suivant pour qu'il affiche  $U_n$  :

```
n=int(input("n:"))
U=.....
for i in range(n) :
    U=.....
print(U)
```

Réponses :

1.

- $U_1 = 1 + 2U_0 = 1 + 2 \times 3 = 7$
- $U_2 = 1 + 2U_1 = 1 + 2 \times 7 = 15$
- $U_3 = 1 + 2U_2 = 1 + 2 \times 15 = 31$

2.

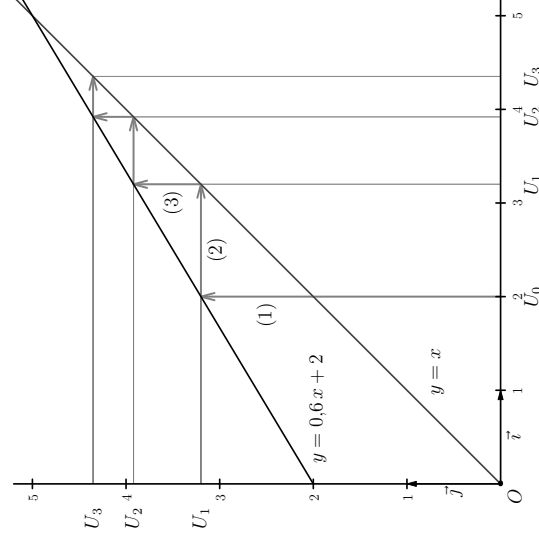
```
n=int(input("n:"))
U=3
for i in range(n) :
    U=1+2*U
print(U)
```

### 3. Suites définies de façon récurrente

#### b) Exemple de détermination graphique des premiers termes d'une suite récurrente avec le mode « web »

##### Exemple(s)

Soit  $(U_n)$ , la suite définie par  $U_0 = 2$  et  $U_{n+1} = 0,6 U_n + 2$ .  
On trace d'abord la droite  $D$  d'équation  $y = 0,6x + 2$  et la droite d'équation  $y = x$ .



- On part de  $U_0$  en abscisse : l'ordonnée du point de la droite  $D$  correspondant à cette abscisse nous donne  $U_1$  [ (1) sur le graphique ].
- Pour déterminer  $U_2 = f(U_1)$ , il nous faut rabattre  $U_1$  sur l'axe des abscisses [ (2) sur le graphique ] en utilisant la droite d'équation  $y = x$ .  
Dès lors,  $U_2$  est l'ordonnée du point de la droite  $D$  d'abscisse  $U_1$  [ (3) sur le graphique ].
- Pour poursuivre la construction, on répète le procédé en rabattant  $U_2$  sur l'axe des abscisses...

### 4. Sens de variation d'une suite

#### Définition

- Une suite  $(U_n)$  est dite **croissante** si pour tout entier  $n$  (à partir d'un certain rang), on a  $U_{n+1} \geq U_n$ .
- Une suite  $(U_n)$  est dite **décroissante** si pour tout entier  $n$  (à partir d'un certain rang), on a  $U_{n+1} \leq U_n$ .
- Une suite  $(U_n)$  est dite **constante** si pour tout entier  $n$  (à partir d'un certain rang), on a  $U_{n+1} = U_n$ .

#### Méthodes pratiques

- **Méthode 1** (valable pour toutes les suites) : on calcule et on étudie le signe de  $U_{n+1} - U_n$ .
  - Si, **pour tout**  $n$ ,  $U_{n+1} - U_n$  **reste positif** alors on peut conclure que  $(U_n)$  est **croissante**.
  - Si, **pour tout**  $n$ ,  $U_{n+1} - U_n$  **reste négatif** alors on peut conclure que  $(U_n)$  est **décroissante**.
- ▲ Exemple 1 : soit  $(U_n)$  définie par  $U_n = 3n + 5$ .  
Pour tout  $n$ ,  $U_{n+1} - U_n = 3(n+1) + 5 - (3n+5) = 3n+8 - 3n-5 = 3$  qui reste positif. On en conclut que  $(U_n)$  est croissante.
- ▲ Exemple 2 : soit  $(U_n)$  définie par  $U_n = -n^2$ .  
Pour tout  $n$ ,  $U_{n+1} - U_n = -(n+1)^2 - (-n^2) = -n^2 - 2n - 1 + n^2 = -2n - 1$  qui reste négatif. On en conclut que  $(U_n)$  est décroissante.
- ▲ Exemple 3 : soit  $(U_n)$  définie par  $U_{n+1} = U_n + \sqrt{n}$ .  
Pour tout  $n$ ,  $U_{n+1} - U_n = \sqrt{n}$  qui reste positif. On en conclut que  $(U_n)$  est croissante.

## 4. Sens de variation d'une suite

- **Méthode 2** (valable uniquement pour les suites dont tous les termes sont strictement positifs) : on calcule et on compare à 1 le quotient  $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ .
  - Si, pour tout  $n$ ,  $U_n > 0$  et  $\frac{U_{n+1}}{U_n}$  reste supérieur à 1 alors on peut conclure que  $(U_n)$  est croissante.
  - Si, pour tout  $n$ ,  $U_n > 0$  et  $\frac{U_{n+1}}{U_n}$  reste inférieur à 1 alors on peut conclure que  $(U_n)$  est décroissante.
- ▶ Exemple 1 : soit  $(U_n)$  définie par  $U_n = 5 \times 3^n$ .  
Pour tout  $n$ ,  $U_n > 0$  et  $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{5 \times 3^{n+1}}{5 \times 3^n} = 3$  qui reste supérieur à 1. On en conclut que  $(U_n)$  est croissante.
- ▶ Exemple 2 : soit  $(U_n)$  définie par  $U_n = \frac{6}{4^n}$ .  
Pour tout  $n$ ,  $U_n > 0$  et  $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\frac{6}{4^{n+1}}}{\frac{6}{4^n}} = \frac{6}{4^{n+1}} \times \frac{4^n}{6} = \frac{1}{4}$  qui reste inférieur à 1. On en conclut que  $(U_n)$  est décroissante.
- **Méthode 3** pour les suites définies de façon explicite par  $U_n = f(n)$ .
  - Si la fonction  $f$  est croissante sur  $[0; +\infty[$  alors la suite  $(U_n)$  est croissante.
  - Si la fonction  $f$  est décroissante sur  $[0; +\infty[$  alors la suite  $(U_n)$  est décroissante.
- ▶ Exemple : soit  $(U_n)$  définie par  $U_n = \frac{1}{3n+1}$ . On a  $U_n = f(n)$  avec  $f$  définie par  $f(x) = \frac{1}{3x+1}$ . Pour tout  $x \geq 0$ ,  $f'(x) = -\frac{3}{(3x+1)^2} < 0$ .  $f$  est décroissante sur  $[0; +\infty[$ . On en conclut que  $(U_n)$  est décroissante.

xmlmath.net

## 5. Suites arithmétiques

### a) Définition

#### Définition

Une suite  $(U_n)$  est dite **arithmétique** si l'on passe d'un terme au terme suivant en ajoutant toujours par le même nombre  $r$ , appelé raison de la suite.

$$\boxed{U_0} \xrightarrow{+r} \boxed{U_1} \xrightarrow{+r} \boxed{U_2} \cdots \boxed{U_n} \xrightarrow{+r} \boxed{U_{n+1}}$$

Autrement dit : pour tout  $n$ , on a  $U_{n+1} = U_n + r$

#### Exemple(s)

$U_0 = 4$ ,  $U_1 = 7$ ,  $U_2 = 10$ ,  $U_3 = 13$  et  $U_4 = 16$  sont les premiers termes d'une suite arithmétique de raison 3 :

$$\boxed{4} \xrightarrow{+3} \boxed{7} \xrightarrow{+3} \boxed{10} \xrightarrow{+3} \boxed{13} \xrightarrow{+3} \boxed{16}$$

### b) Calcul des termes d'une suite arithmétique

#### Propriété(s)

Si  $(U_n)$  est une suite arithmétique de raison  $r$  alors pour tous les entiers positifs  $n$  et  $p$ , on a :  
 $U_n = U_0 + nr$  et  $U_n = U_p + (n - p)r$

**Démonstration** : pour aller de  $U_0$  à  $U_n$  il faut ajouter  $n$  fois  $r$ . Et si  $U_n = U_0 + nr$  et  $U_p = U_0 + pr$ , on a  
 $U_n - U_p = (n - p)r$ .

xmlmath.net

## 5. Suites arithmétiques

### Exemple(s)

1. Soit  $(U_n)$  une suite arithmétique de raison  $r$ .

- Exprimer  $U_5$  en fonction de  $U_0$ .
- Exprimer  $U_{13}$  en fonction de  $U_0$ .
- Exprimer  $U_{24}$  en fonction de  $U_4$ .
- Exprimer  $U_{16}$  en fonction de  $U_{11}$ .

2. Soit  $(U_n)$  la suite arithmétique de 1<sup>er</sup> terme  $U_0 = 2$  et de raison  $r = 3$ .

- Calculer  $U_{10}$ .
- Calculer  $U_{33}$ .
- Exprimer  $U_n$  en fonction de  $n$ .

3. Soit  $(U_n)$  la suite arithmétique de 1<sup>er</sup> terme  $U_0 = 3$  et de raison  $r = -5$ .

- Calculer  $U_{12}$ .
- Calculer  $U_{25}$ .

c) Exprimer  $U_n$  en fonction de  $n$ .

4. Soit  $(U_n)$  la suite arithmétique de raison  $r = 3$  avec  $U_5 = 16$ .

a) Calculer  $U_{34}$ .

b) Exprimer  $U_n$  en fonction de  $n$ .

5. Soit  $(U_n)$  la suite arithmétique telle que  $U_2 = 7$  et  $U_5 = 25$ . Déterminer sa raison  $r$  et  $U_0$ .

Réponses :

1.

- $U_5 = U_0 + 5r$ .
- $U_{13} = U_0 + 13r$ .
- $U_{24} = U_4 + 20r$ .
- $U_{16} = U_{11} + 5r$ .

2.

- $U_{10} = U_0 + 10r = 2 + 10 \times 3 = 32$ .
- $U_{33} = U_0 + 33r = 2 + 33 \times 3 = 101$ .
- $U_n = U_0 + nr = 2 + 3n$ .

3.

- $U_{12} = U_0 + 12r = 3 + 12 \times (-5) = -57$ .
- $U_{25} = U_0 + 35r = 3 + 25 \times (-5) = -122$ .
- $U_n = U_0 + nr = 3 - 5n$ .

4.

a)  $U_{34} = U_5 + 29r = 16 + 29 \times 3 = 103$ .

b)  $U_n = U_5 + (n - 5)r = 16 + 3(n - 5) = 3n + 1$ .

5.  $U_5 = U_2 + 3r \Leftrightarrow 25 = 7 + 3r \Leftrightarrow r = 6$ .

$U_0 = U_2 - 2r = 7 - 2 \times 6 = -5$ .

## 5. Suites arithmétiques

### c) Comment montrer qu'une suite $(U_n)$ est arithmétique ?

#### Principe

- Soit l'énoncé indique que l'on passe d'un terme au terme suivant en ajoutant toujours le même nombre, alors on peut conclure directement que la suite est arithmétique de raison égale à ce nombre.
- Soit on montre que, pour **tout**  $n$ ,  $U_{n+1} - U_n$  est égal à une constante (indépendante de  $n$ ). On peut alors conclure que la suite est arithmétique de raison égale à cette constante.

### Exemple(s)

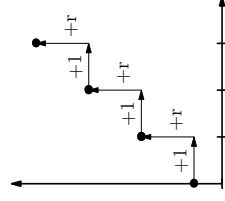
La suite  $(U_n)$  définie par  $U_n = 4n + 5$  est-elle arithmétique ?

Pour tout  $n$ ,  $U_{n+1} - U_n = 4(n+1) + 5 - (4n + 5) = 4$ . On en déduit que  $(U_n)$  est une suite arithmétique de raison égale à 4.

### d) Propriété de la représentation graphique d'une suite arithmétique

#### Propriété(s)

Les points de la représentation graphique d'une suite arithmétique sont situés sur une même droite dont le coefficient directeur est égal à la raison.



## 5. Suites arithmétiques

### e) Sens de variation d'une suite arithmétique

#### Propriété(s)

Une suite arithmétique de raison  $r$  positive est croissante et une suite arithmétique de raison  $r$  négative est décroissante.

**Démonstration :** car  $U_{n+1} - U_n = r$  pour tout  $n$ .

### e) Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique

#### Propriété(s)

Si  $(U_n)$  est arithmétique de raison  $r$  alors pour tous entiers  $n$  et  $p$  avec  $p < n$  :

$$U_p + U_{p+1} + \dots + U_{n-1} + U_n = (n - p + 1) \times \frac{U_p + U_n}{2} = (\text{nb de termes}) \times \frac{\text{1er terme} + \text{dernier}}{2}$$

#### Démonstration :

- Pour tout entier  $i$  qui convient,  
 $U_{p+i} + U_{n-i} = U_0 + (p+i)r + U_0 + (n-i)r = U_0 + pr + \cancel{ir} + U_0 + nr - \cancel{ir} = U_p + U_n$ .
- Soit  $S = U_p + U_{p+1} + \dots + U_{n-1} + U_n$ , on a aussi  $S = U_n + U_{n-1} + \dots + U_{p+1} + U_p$  en l'écrivant dans l'autre sens. D'où en ajoutant, on a  
 $2S = \underbrace{(U_p + U_n) + (U_{p+1} + U_{n-1}) + \dots + (U_{n-1} + U_{p+1})}_{= U_p + U_n} + \underbrace{(U_n + U_p)}_{= (n - p + 1) \times (U_p + U_n)}$   
 nb de termes

xmlmath.net

## 5. Suites arithmétiques

### Conséquence

Pour tout entier  $n > 1$ , on a  $1 + 2 + \dots + (n - 1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$ .

#### Exemple(s)

**1.** Soit  $(U_n)$  la suite arithmétique de 1<sup>er</sup> terme  $U_0 = 2$  et de raison  $r = 3$ .

- a) Calculer la somme  $S = U_0 + U_1 + \dots + U_{10}$ .  
 b) Calculer la somme  $S' = U_{10} + U_{11} + \dots + U_{50}$ .

Réponses :

1.

a)  $S = 11 \times \frac{U_0 + U_{10}}{2} = 11 \times \frac{2 + 32}{2} = 187$ .

Car  $U_{10} = U_0 + 10r = 32$

b)  $S = 41 \times \frac{U_{10} + U_{50}}{2} = 41 \times \frac{32 + 152}{2} = 3772$ .

Car  $U_{50} = U_0 + 50r = 152$

**2.** Calculer la somme

$$S = 5 + 7 + 9 + 11 + \dots + 119 + 121.$$

On reconnaît la somme des termes d'une suite arithmétique de raison 2. Mais il nous manque le nombre de termes pour pouvoir appliquer la formule. On utilise alors la propriété suivante :

$$\text{nb de termes} = \frac{\text{dernier terme} - \text{premier}}{\text{raison}} + 1$$

$$= \left( \frac{121 - 5}{2} + 1 \right) = 59.$$

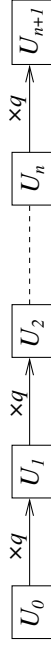
$$\text{D'où, } S = 59 \times \frac{5 + 121}{2} = 3717.$$

xmlmath.net

## a) Définition

## Définition

Une suite  $(U_n)$  est dite **géométrique** si l'on passe d'un terme au terme suivant en multipliant toujours par le même nombre  $q$ , appelé raison de la suite.



Autrement dit : pour tout  $n$ , on a  $U_{n+1} = qU_n$

## Exemple(s)

$U_0 = 2$ ,  $U_1 = 6$ ,  $U_2 = 18$ ,  $U_3 = 54$  et  $U_4 = 162$  sont les premiers termes d'une suite géométrique de raison 3 :



## b) Calcul des termes d'une suite géométrique

## Propriété(s)

Si  $(U_n)$  est une suite géométrique de raison  $q \neq 0$  alors pour tous les entiers positifs  $n$  et  $p$ , on a :  $U_n = q^n U_0$  et  $U_n = q^{n-p} U_p$

**Démonstration** : pour aller de  $U_0$  à  $U_n$  il faut multiplier  $n$  fois par  $q$ . Et si  $U_n = q^n U_0$  et  $U_p = q^n U_0$ , on a  $\frac{U_n}{q^n} = \frac{U_p}{q^p} \Leftrightarrow U_n = q^n \times \frac{U_p}{q^p}$ .

xm1math.net

## 6. Suites géométriques

## Exemple(s)

- Soit  $(U_n)$  une suite géométrique de raison  $q$ .
  - Exprimer  $U_3$  en fonction de  $U_0$ .
  - Exprimer  $U_{12}$  en fonction de  $U_0$ .
  - Exprimer  $U_{15}$  en fonction de  $U_5$ .
  - Exprimer  $U_{24}$  en fonction de  $U_{11}$ .
- Soit  $(U_n)$  la suite géométrique de 1<sup>er</sup> terme  $U_0 = 4$  et de raison  $q = 2$ .
  - Calculer  $U_5$ .
  - Calculer  $U_8$ .
  - Exprimer  $U_n$  en fonction de  $n$ .
- Soit  $(U_n)$  la suite géométrique de 1<sup>er</sup> terme  $U_0 = 640$  et de raison  $q = 0,5$ .
  - Calculer  $U_3$ .
  - Calculer  $U_6$ .
  - Exprimer  $U_n$  en fonction de  $n$ .
- Soit  $(U_n)$  la suite géométrique de raison  $q = \frac{1}{3}$  avec  $U_2 = 54$ .
  - Calculer  $U_5$ .
  - Exprimer  $U_n$  en fonction de  $n$ .

## Réponses :

- $U_3 = q^3 U_0$ .
  - $U_{12} = q^{12} U_0$ .
  - $U_{15} = q^{10} U_5$ .
  - $U_{24} = q^{13} U_{11}$ .
- $U_5 = q^5 U_0 = 2^5 \times 4 = 128$ .
  - $U_8 = q^8 U_0 = 2^8 \times 4 = 1024$ .
  - $U_n = q^n U_0 = 2^n \times 4$ .
- $U_3 = q^3 U_0 = 0,5^3 \times 640 = 80$ .
  - $U_6 = q^6 U_0 = 0,5^6 \times 640 = 10$ .
  - $U_n = q^n U_0 = 0,5^n \times 640$ .
- $U_5 = q^3 U_2 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times 54 = 2$ .
  - $U_n = q^{n-2} U_2 = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} \times 54$ .

xm1math.net



## 6. Suites géométriques

### c) Comment montrer qu'une suite $(U_n)$ est géométrique ?

#### Principe

- Si l'énoncé indique que l'on passe d'un terme au terme suivant en multipliant toujours le même nombre, alors on peut conclure directement que la suite est géométrique de raison égale à ce nombre.
- Sinon, si tous les termes sont non nuls et si on montre que, pour **tout**  $n$ ,  $\frac{U_{n+1}}{U_n}$  est égal à une constante (indépendante de  $n$ ) alors on peut conclure que la suite est géométrique de raison égale à cette constante.

#### Exemple(s)

La suite  $(U_n)$  définie par  $U_n = 5 \times 3^n$  est-elle géométrique ?

Pour tout  $n$ ,  $U_n \neq 0$  et  $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{5 \times 3^{n+1}}{5 \times 3^n} = 3$ .  $(U_n)$  est donc une suite géométrique de raison égale à 3.

### d) Sens de variation d'une suite géométrique

#### Propriété(s)

- *Si le premier terme est positif et si  $q > 1$  alors la suite géométrique de raison  $q$  est croissante.*
- *Si le premier terme est positif et si  $0 < q < 1$  alors la suite géométrique de raison  $q$  est décroissante.*

**Démonstration** : car dans ces cas là,  $U_n > 0$  et  $\frac{U_{n+1}}{U_n} = q$  pour tout  $n$ .

**Remarque** : dans les autres cas, il faut en revenir à l'étude du signe de  $U_{n+1} - U_n$ .



## 6. Suites géométriques

### e) Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique

#### Propriété(s)

- *Pour tout réel  $q \neq 1$  :  $1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$*
- *Si  $(U_n)$  est une suite géométrique de raison  $q \neq 1$  alors pour tous les entiers  $n$  et  $p$  avec  $p < n$  :*  

$$U_p + U_{p+1} + \dots + U_{n-1} + U_n = U_p \times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q} = \text{premier terme} \times \frac{1 - q^{\text{nb de termes}}}{1 - q}$$

#### Démonstration :

- Si  $S = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n$  alors

$$S - qS = 1 + \cancel{q} + \cancel{q^2} + \dots + \cancel{q^{n-1}} + \cancel{q^n} - \cancel{q} - \cancel{q^2} - \dots - \cancel{q^{n-1}} = 1 - q^{n+1} \Rightarrow (1 - q)S = 1 - q^{n+1}.$$

- $U_p + U_{p+1} + \dots + U_{n-1} + U_n = U_p + qU_p + \dots + q^{n-1-p}U_p + q^{n-p}U_p$   
 $= U_p (1 + q + \dots + q^{n-1-p} + q^{n-p}) = U_p \times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}.$

#### Exemple(s)

Réponses :

- Soit  $(U_n)$  la suite géométrique de raison  $q = 0,5$  et  $1. S = U_0 \times \frac{1 - 0,5^{10}}{1 - 0,5} = 512 \times \frac{1 - 0,5^{10}}{0,5} = 1023$  de 1<sup>er</sup> terme  $U_0 = 512$ . Calculer la somme  $S = U_0 + U_1 + \dots + U_9$ .
- Calculer la somme  $S = 2 + 6 + 18 + 54 + \dots + 486$ .  
 $S - 3S = 2 + 6 + 18 + 54 + \dots + 486 - 6 - 18 - 54 - \dots - 1458 = 2 - 1458 = -1456$ . On en déduit que  $-2S = -1456$  et que  $S = 728$ .

## 7. Exemple de suite récurrente définie par $U_{n+1} = aU_n + b$

### Exemple(s)

Soit  $(U_n)$  la suite définie par  $U_0 = 2$  et  $U_{n+1} = 0,6U_n + 2$ .

1. Calculer  $U_1, U_2, U_1 - U_0, U_2 - U_1, \frac{U_1}{U_0}$  et  $\frac{U_2}{U_1}$ .

*Réponse* :  $U_1 = 0,6 \times 2 + 2 = 3,2$ ,  $U_2 = 0,6 \times 3,2 + 2 = 3,92$ ,  $U_1 - U_0 = 1,2$ ,  $U_2 - U_1 = 0,72$ ,  $\frac{U_1}{U_0} = 1,6$  et  $\frac{U_2}{U_1} = 1,225$

2. Justifier que  $(U_n)$  n'est ni arithmétique, ni géométrique.

*Réponse* : elle ne peut pas être arithmétique car  $U_2 - U_1 \neq U_1 - U_0$  et elle ne peut pas être géométrique car  $\frac{U_2}{U_1} \neq \frac{U_1}{U_0}$ .

3. Montrer que la suite  $(V_n)$  définie par  $V_n = U_n - 5$  est une suite géométrique dont on donnera le 1<sup>er</sup> terme  $V_0$  et la raison  $q$ .

*Réponse* :

- on calcule  $\frac{V_{n+1}}{V_n}$  en exprimant  $V_n$  et  $V_{n+1}$  en fonction de  $U_n$  et de  $U_{n+1}$  :

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{U_{n+1} - 5}{U_n - 5}$$

- on remplace alors  $U_{n+1}$  par ce qu'indique la définition de la suite  $(U_n)$  :

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{U_{n+1} - 5}{U_n - 5} = \frac{0,6U_n + 2 - 5}{U_n - 5}$$

- on simplifie le numérateur et on le factorise par le coefficient devant  $U_n$  :

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{U_{n+1} - 5}{U_n - 5} = \frac{0,6U_n + 2 - 5}{U_n - 5} = \frac{0,6(U_n - \frac{3}{0,6})}{U_n - 5} = \frac{0,6(U_n - 5)}{U_n - 5} = 0,6$$

$(V_n)$  est donc une suite géométrique de raison  $q = 0,6$  et de 1<sup>er</sup> terme  $V_0 = U_0 - 5 = 2 - 5 = -3$ .

## 7. Exemple de suite récurrente définie par $U_{n+1} = aU_n + b$

4. En déduire l'expression de  $V_n$ , puis de  $U_n$  en fonction de  $n$ .

*Réponse* : Pour tout  $n$ ,  $V_n = q^n \times V_0 = -3(0,6)^n$ .  $V_n = U_n - 5 \Leftrightarrow U_n = V_n + 5 = -3(0,6)^n + 5$

5. Étudier le sens de variation de la suite  $(U_n)$ .

*Réponse* : Pour tout  $n$ ,  $U_{n+1} - U_n = -3(0,6)^{n+1} + 5 - [-3(0,6)^n + 5] = -3(0,6)^{n+1} + 3(0,6)^n = 3(0,6)^n \times [-0,6 + 1] = 3(0,6)^n \times 0,4 = 1,2(0,6)^n$ .

Le résultat étant positif pour tout  $n$ , on en déduit que  $(U_n)$  est croissante.

6. Calculer  $V_0 + V_1 + \dots + V_9$  et en déduire  $U_0 + U_1 + \dots + U_9$ .

*Réponse* :

$$(V_n) \text{ est géométrique, donc } V_0 + V_1 + \dots + V_9 = V_0 \times \frac{1 - (0,6)^{10}}{1 - 0,6} = -3 \times \frac{1 - (0,6)^{10}}{0,4} \approx -7,45.$$

Pour tout  $n$ ,  $U_n = V_n + 5$ . Donc,  $U_0 + U_1 + \dots + U_9 = V_0 + 5 + V_1 + 5 + \dots + V_9 + 5 = V_0 + V_1 + \dots + V_9 + 50 \approx 42,55$ .

7. Compléter le script python ci-dessous pour qu'il affiche le plus petit entier  $n$  tel que  $U_n > 4,997$ .

```
n=0
U=2
while ..... :
    U=0.6*U+2
    n=n+1
print(n)
```

*Réponse* :

```
n=0
U=2
while U<=4.997 :
    U=0.6*U+2
    n=n+1
print(n)
```

## 8. Exemples de comportement d'une suite quand $n$ tend vers $+\infty$

### Exemple(s)

1. Soit  $(U_n)$ , la suite définie par  $U_n = 3 + \frac{1}{n}$ .

- Compléter les inégalités suivantes :

① Si  $n > 10$  alors  $0 < \frac{1}{n} < \dots\dots\dots$  et  $3 < U_n < \dots\dots\dots$

② Si  $n > 100$  alors  $0 < \frac{1}{n} < \dots\dots\dots$  et  $3 < U_n < \dots\dots\dots$

③ Si  $n > \dots\dots\dots$  alors  $0 < \frac{1}{n} < \dots\dots\dots$  et  $3 < U_n < 3,001$ .

- Il semble que l'on puisse toujours trouver un  $n$  assez grand pour que  $U_n$  soit aussi proche de 3 que l'on veut. On dit alors que  $U_n$  tend vers 3 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

2. Soit  $(U_n)$ , la suite définie par  $U_n = n^2$ .

- Compléter les inégalités suivantes :

① Si  $n > 10$  alors  $U_n > \dots\dots\dots$

② Si  $n > 100$  alors  $U_n > \dots\dots\dots$

③ Si  $n > \dots\dots\dots$  alors  $U_n > 10^6$ .

- Il semble que l'on puisse toujours trouver un  $n$  assez grand pour que  $U_n$  soit aussi grand que l'on veut. On dit alors que  $U_n$  tend vers  $+\infty$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

Réponses :

① Si  $n > 10$  alors  $0 < \frac{1}{n} < 0,1$  et  $3 < U_n < 3,1$ .

② Si  $n > 100$  alors  $0 < \frac{1}{n} < 0,01$  et  $3 < U_n < 3,01$ .

③ Si  $n > 1000$  alors  $0 < \frac{1}{n} < 0,001$  et  $3 < U_n < 3,001$ .

Réponses :

① Si  $n > 10$  alors  $U_n > 100$ .

② Si  $n > 100$  alors  $U_n > 10000$ .

③ Si  $n > 1000$  alors  $U_n > 10^6$ .

## Fin du chapitre