Spécialité - $1^{\text{re}}$ générale

# Second degré



https://www.xm1math.net





## 1. Rappels sur les équations et inéquations

### a) Équations de la forme $ax + b = 0$

**Principe**

La résolution de ces équations est basée sur les deux opérations suivantes :

- Opération n°1 : $ax+b = 0 \Leftrightarrow ax = -b$ (transposition d'un élément d'un membre à l'autre ; on change le signe de l'élément qu'on transpose)
- Opération n°2 : $ax = -b \Leftrightarrow x = \dfrac{-b}{a}$ (division par le coefficient devant $x$ ; on ne change pas le signe du coefficient par lequel on divise)

**Exemple(s)**

1. Résolution de $2x + 3 = 0$ : $2x+3 = 0 \Leftrightarrow 2x = -3 \Leftrightarrow x = \dfrac{-3}{2}$ .$S = \left\{-\dfrac{3}{2}\right\}$
2. Résolution de $3x - 4 = 0$ : $3x-4 = 0 \Leftrightarrow 3x = 4 \Leftrightarrow x = \dfrac{4}{3}$ .$S = \left\{\dfrac{4}{3}\right\}$
3. Résolution de $7x = 0$ : $7x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{0}{7} \Leftrightarrow x = 0$ .$S = \{0\}$

# 1. Rappels sur les équations et inéquations

## b) Équations sous la forme d'un produit d'expressions du 1er degré égal à zéro ou qui s'y ramène

### Principe

On utilise la règle : « Dire qu'un produit de deux facteurs est nul équivaut à dire que le premier facteur est nul OU que le deuxième facteur est nul »

### Exemple(s)

**1)** Résolution de $(2x-8)(6-3x)=0$ :

$$\begin{aligned}(2x-8)(6-3x)=0 &\Leftrightarrow 2x-8=0 \text{ ou } 6-3x=0\\ &\Leftrightarrow 2x=8 \text{ ou } -3x=-6\\ &\Leftrightarrow x=\frac{8}{2}=4 \text{ ou } x=\frac{-6}{-3}=2.\ S=\{4\ ;\ 2\}\end{aligned}$$

**2)** Résolution de $4x^2-9=0$ : (on factorise en remarquant la présence de la forme $a^2-b^2$)

$$\begin{aligned}4x^2-9=0 &\Leftrightarrow (2x)^2-3^2=0\\ &\Leftrightarrow (2x-3)(2x+3)=0\\ &\Leftrightarrow 2x-3=0 \text{ ou } 2x+3=0\\ &\Leftrightarrow 2x=3 \text{ ou } 2x=-3\\ &\Leftrightarrow x=\tfrac{3}{2} \text{ ou } x=\tfrac{-3}{2}.\ S=\left\{\tfrac{3}{2}\ ;\ -\tfrac{3}{2}\right\}\end{aligned}$$





# 1. Rappels sur les équations et inéquations

### Exemple(s)

**3)** Résolution de $x^2-4x=0$ : (présence d'un facteur commun)

$$\begin{aligned}x^2-4x=0 &\Leftrightarrow \underline{x}\times x-4\underline{x}=0\\ &\Leftrightarrow \underline{x}(x-4)=0\\ &\Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x-4=0\\ &\Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x=4.\ S=\{0\ ;\ 4\}\end{aligned}$$

## c) Équations de la forme $x^2=a$

### Principe

- Si $a$ est strictement négatif, l'équation $x^2=a$ n'admet aucune solution dans $\mathbb{R}$ ;
- L'équation $x^2=0$ admet 0 comme unique solution ;
- Si $a$ est strictement positif, l'équation $x^2=a$ admet deux solutions : $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.

### Exemple(s)

1. Résolution de $x^2=4$ : $x^2 \Leftrightarrow x=\sqrt{4}=2$ ou $x=-\sqrt{4}=-2$. $S=\{2\ ;\ -2\}$
2. Résolution de $x^2=-1$ : cette équation n'admet aucune solution dans $\mathbb{R}$. $S=\varnothing$.

# 1. Rappels sur les équations et inéquations

## d) Équations avec l'inconnue au dénominateur

### Méthode

- Déterminer les valeurs de l'inconnue qui annulent le(s) dénominateur(s) et donc pour lesquelles l'équation est impossible. C'est ce qu'on appelle déterminer les **valeurs interdites**
- Si possible, se ramener à la forme « **une** fraction = **une** fraction » et utiliser « le produit en croix » : $\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \Leftrightarrow A \times D = B \times C$
- Si cela n'est pas possible, il faut alors se ramener à 0 et se ramener à la forme « **une** fraction =0 » (par réduction au même dénominateur...) et utiliser que $\frac{A}{B} = 0 \Leftrightarrow A = 0$
- Après détermination des $x$, vérifier qu'il ne s'agit pas de valeurs interdites avant d'écrire $S$.

### Exemple(s)

Résolution de $\frac{3}{x+2} = \frac{4}{3x}$ .Valeurs interdites : il faut $x \neq -2$ et $x \neq 0$. Dans ces conditions,

$$\begin{aligned} \frac{3}{x+2} = \frac{4}{3x} &\Leftrightarrow 3 \times 3x = 4 \times (x+2) \\ &\Leftrightarrow 9x = 4x + 8 \\ &\Leftrightarrow 9x - 4x = 8 \\ &\Leftrightarrow 5x = 8 \\ &\Leftrightarrow \tfrac{8}{5} = x.\ S = \left\{\tfrac{8}{5}\right\} \end{aligned}$$





# 1. Rappels sur les équations et inéquations

## d) signe de $ax + b$

### Propriété(s)

*Le signe de $ax+b$ (avec $a \neq 0$) suivant les valeurs de $x$ est donné par le tableau :*

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{b}{a}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| signe de $ax+b$ | | signe de $-a$ | 0 | signe de $a$ | |

*(Le tableau peut se résumer avec la règle suivante : signe du coefficient devant $x$ après le « 0 »)*

### Exemple(s)

Signe de $4x - 8$ :
$4x - 8 = 0 \Leftrightarrow 4x = 8 \Leftrightarrow x = 2$
Signe du coefficient devant $x$ (ici 4, donc « + ») après le « 0 » :

| $x$ | $-\infty$ | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| signe de $4x-8$ | | $-$ | 0 | $+$ | |

Signe de $9 - 3x$ :
$9 - 3x = 0 \Leftrightarrow 9 = 3x \Leftrightarrow x = 3$
Signe du coefficient devant $x$ (ici $-3$, donc « - ») après le « 0 » :

| $x$ | $-\infty$ | | 3 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| signe de $9-3x$ | | $+$ | 0 | $-$ | |

# 1. Rappels sur les équations et inéquations

## d) Signe d'un produit ou d'un quotient d'expressions du 1er degré

### Principe

1. Dans un tableau de signes, on inscrit une ligne pour chaque facteur du produit ou du quotient et une ligne finale pour l'expression complète ;
2. On détermine les valeurs de $x$ qui annulent chaque facteur ;
3. On applique la règle « signe du coefficient devant $x$ après le 0 » pour chaque facteur ;
4. On applique la règle des signes pour déterminer les signes de l'expression complète dans la dernière ligne en insérant un « 0 » pour chaque valeur de $x$ annulant le produit ou le quotient et une « double barre » pour chaque valeur de $x$ annulant l'éventuel dénominateur (pour indiquer la présence d'une valeur interdite)

### Exemple(s)

**1.** Signe de $2x(x+3)(1-x)$ :

- $2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{0}{2} = 0$
- $x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$
- $1 - x = 0 \Leftrightarrow 1 = x$

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| signe de $2x$ | | $-$ | \| | $-$ | $0$ | $+$ | \| | $+$ | |
| signe de $x+3$ | | $-$ | $0$ | $+$ | \| | $+$ | \| | $+$ | |
| signe de $1-x$ | | $+$ | \| | $+$ | \| | $+$ | $0$ | $-$ | |
| signe de $2x(x+3)(1-x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |





# 1. Rappels sur les équations et inéquations

### Exemple(s)

**2.** Signe de $\dfrac{-x}{(3x-6)(x+2)}$ :

- $-x = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $3x - 6 = 0 \Leftrightarrow 3x = 6 \Leftrightarrow x = \frac{6}{3} = 2$
- $x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| signe de $-x$ | | $+$ | \| | $+$ | $0$ | $-$ | \| | $-$ | |
| signe de $3x-6$ | | $-$ | \| | $-$ | \| | $-$ | $0$ | $+$ | |
| signe de $x+2$ | | $-$ | $0$ | $+$ | \| | $+$ | \| | $+$ | |
| signe de $\frac{-x}{(3x-6)(x+2)}$ | | $+$ | \|\| | $-$ | $0$ | $+$ | \|\| | $-$ | |

## e) Exemple d'inéquations nécessitant un tableau de signe

### Exemple(s)

Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $4x > x^2$.
On se ramène à 0 et on factorise : $4x > x^2 \Leftrightarrow 4x - x^2 > 0 \Leftrightarrow x(4-x) > 0$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | $\longleftrightarrow$ | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | | $-$ | $0$ | $+$ | \| | $+$ | |
| $4-x$ | | $+$ | \| | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $x(4-x)$ | | $-$ | $0$ | $\oplus$ | $0$ | $-$ | |

Les valeurs de $x$ pour lesquelles on a « + » dans la dernière ligne nous donne $S = ]0\,;4[$.

## 2. Second degré : définitions

### a) Trinôme du second degré

Définition

Toute fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x)$ puisse s'écrire sous la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$) est appelée **trinôme du second degré**.

Exemple(s)

1. Pour $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$, on a $a = \ldots\ldots$ ; $b = \ldots\ldots$ et $c = \ldots\ldots$.
2. Pour $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3$, on a $a = \ldots\ldots$ ; $b = \ldots\ldots$ et $c = \ldots\ldots$.
3. Pour $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\sqrt{2}x^2 + 7x$, on a $a = \ldots\ldots$ ; $b = \ldots\ldots$ et $c = \ldots\ldots$.

### b) Racines d'un trinôme du second degré

Définition

On appelle **racine** d'un trinôme $f$ défini par $f(x) = ax^2 + bx + c$ toute valeur de $x$ qui annule $f$.

Exemple(s)

Soit $f$ le trinôme défini par $f(x) = 2x^2 - 3x - 5$.
a) 1 est-il une racine de $f$ ? ......
b) $-1$ est-il une racine de $f$ ? ......





## 3. Factorisation, signe et racines d'un trinôme du second degré

### a) Forme canonique

Pour tout $x$, $a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)\right] = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \cancel{\frac{b^2}{4a^2}} - \cancel{\frac{b^2}{4a^2}} + \frac{4ac}{4a^2}\right] = ax^2 + bx + c$

Définition

Étant donné le trinôme défini par $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ :

- On appelle **discriminant** de $f$ le réel, noté $\Delta$, tel que $\Delta = b^2 - 4ac$.
- L'écriture de $f(x)$ sous la forme $f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$ est appelée **forme canonique** du trinôme.

### b) Cas où $\Delta < 0$ :

On a, pour tout $x$, $f(x) = a \underbrace{\left[\underbrace{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}_{\geqslant 0} + \frac{\overbrace{(-\Delta)}^{>0}}{\underbrace{4a^2}_{>0}}\right]}_{>0}$

# 3. Factorisation, signe et racines d'un trinôme du second degré

On en déduit que :

- *Racines* : comme $a \neq 0$, $f(x)$ ne peut pas s'annuler dans $\mathbb{R}$
- *Factorisation* : $f(x)$ ne peut pas se factoriser en produit d'expressions du 1$^{\text{er}}$ degré dans $\mathbb{R}$
- *Signe* : pour tout $x$, $f(x)$ a le même signe que $a$

## c) Cas où $\Delta = 0$ :

On a, pour tout $x$, $f(x) = a \underbrace{\left[x + \dfrac{b}{2a}\right]^2}_{\geqslant 0}$

On en déduit que :

- *Racines* : comme $a \neq 0$, $f(x) = 0 \Leftrightarrow \left[x + \dfrac{b}{2a}\right]^2 = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{b}{2a}$ . $f$ n'admet qu'une seule racine (dite « double ») : $x_1 = -\dfrac{b}{2a}$
- *Factorisation* : pour tout $x$ $f(x) = a\,(x - x_1)^2$
- *Signe* : pour tout $x$, $f(x)$ a le même signe que $a$, mais s'annule pour la racine double

xm1math.net





# 3. Factorisation, signe et racines d'un trinôme du second degré

## d) Cas où $\Delta > 0$ :

Pour tout $x$, on a $f(x) = a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right] = a \overbrace{\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \left(\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right]}^{\text{forme } A^2 - B^2}$

$$= a \overbrace{\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)}^{A+B} \overbrace{\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)}^{A-B} = a\left(x - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

En posant $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$, on a $f(x) = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$, pour tout $x$.

On en déduit que :

- *Racines* : comme $a \neq 0$, $f(x) = 0 \Leftrightarrow x - x_1 = 0$ ou $x - x_2 = 0$ . $f$ admet 2 racines : $x_1$ et $x_2$.
- *Factorisation* : pour tout $x$ $f(x) = a\,(x - x_1)$
- *Signe* : (en supposant que $x_1 < x_2$)

| $x$ | $-\infty$ | | $x_1$ | | $x_2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x - x_1$ | | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ | |
| $x - x_2$ | | $-$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $(x - x_1)(x - x_2)$ | | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |
| $f(x)$ | | signe de $a$ | 0 | signe de $-a$ | 0 | signe de $a$ | |

# 3. Factorisation, signe et racines d'un trinôme du second degré

## e) Tableau récapitulatif (ce qu'il faut apprendre)

Étant donné le trinôme défini par $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$

| $\Delta = b^2 - 4ac$ | Racines | Factorisation de $f(x)$ | Signe |
|---|---|---|---|
| Si $\Delta > 0$ | Deux racines : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ | $a(x-x_1)(x-x_2)$ | $\begin{array}{c\|ccccc} x & -\infty & x_1 & & x_2 & +\infty \\ \hline ax^2+bx+c & \text{signe de } a & 0 & \text{signe de } (-a) & 0 & \text{signe de } a \end{array}$ (en supposant que $x_1 < x_2$) « Du signe de $a$ à l'extérieur des racines » |
| Si $\Delta = 0$ | Une racine (dite double) : $x_1 = \dfrac{-b}{2a}$ | $a(x-x_1)^2$ | $\begin{array}{c\|ccc} x & -\infty & x_1 & +\infty \\ \hline ax^2+bx+c & \text{signe de } a & 0 & \text{signe de } a \end{array}$ « Toujours du signe de $a$ et s'annule pour la racine » |
| Si $\Delta < 0$ | Pas de racines | Pas de factorisation | $\begin{array}{c\|cc} x & -\infty & +\infty \\ \hline ax^2+bx+c & \text{signe de } a & \end{array}$ « Toujours du signe de $a$ » |





# 4. Résolution d'équations où intervient du second degré

## a) Équations de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a$, $b$ et $c$ non nuls

### Principe

Résoudre une telle équation revient à déterminer les racines du trinôme défini par $f(x) = ax^2 + bx + c$ à l'aide de $\Delta$.

### Exemple(s)

**1)** Résolution de $x^2 + 2x - 3 = 0$ : $a = 1$, $b = 2$, $c = -3$, $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16$.

$x_1 = \dfrac{-2-\sqrt{16}}{2 \times 1} = \dfrac{-6}{2} = -3$ $\quad x_2 = \dfrac{-2+\sqrt{16}}{2 \times 1} = \dfrac{2}{2} = 1$ $\quad S = \{-3; 1\}$

**2)** Résolution de $-7x^2 + 6x + 1 = 0$ : $a = -7$, $b = 6$, $c = 1$, $\Delta = 6^2 - 4 \times (-7) \times 1 = 64$.

$x_1 = \dfrac{-6-\sqrt{64}}{2 \times (-7)} = \dfrac{-14}{-14} = 1$ $\quad x_2 = \dfrac{-6+\sqrt{64}}{2 \times (-7)} = \dfrac{2}{-14} = -\dfrac{1}{7}$ $\quad S = \left\{1; -\dfrac{1}{7}\right\}$

**3)** Résolution de $x^2 - 5x + 8 = 0$ : $a = 1$, $b = -5$, $c = 8$, $\Delta = 5^2 - 4 \times 1 \times 8 = -7$. $S = \varnothing$

**4)** Résolution de $2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$ : $a = 2$, $b = -2\sqrt{2}$, $c = 1$, $\Delta = (-2\sqrt{2})^2 - 4 \times 2 \times 1 = 0$.

$x_1 = \dfrac{-(-2\sqrt{2})}{2 \times 2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ . $S = \left\{\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

**5)** Résolution de $\sqrt{2}x^2 - 3x + \sqrt{2} = 0$ : $a = \sqrt{2}$, $b = -3$, $c = \sqrt{2}$, $\Delta = (-3)^2 - 4 \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 1$.

$x_1 = \dfrac{-(-3)-\sqrt{1}}{2 \times \sqrt{2}} = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad x_2 = \dfrac{-(-3)+\sqrt{1}}{2 \times \sqrt{2}} = \dfrac{4}{2\sqrt{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}}$ $\quad S = \left\{\dfrac{1}{\sqrt{2}}; \dfrac{2}{\sqrt{2}}\right\}$

# 4. Résolution d'équations où intervient du second degré

## b) Équations de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec $b$ ou $c$ nul

Inutile de calculer $\Delta$ : on factorise ou on utilise la propriété sur les équations de la forme $x^2 = a$.

## c) Exemples d'équations se ramenant à des équations du second degré

### Exemple(s)

**1)** Résolution de $\dfrac{x^2 - 4x - 5}{11x + 11} = -\dfrac{1}{2}$. Valeur interdite : il faut $11x + 11 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$.

Dans ces conditions : $\dfrac{x^2 - 4x - 5}{11x + 11} = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2(x^2 - 4x - 5) = -(11x + 11)$ (produit en croix)

$\Leftrightarrow 2x^2 - 8x - 10 = -11x - 11 \Leftrightarrow 2x^2 - 8x - 10 + 11x + 11 = 0$ (on se ramène à 0)

$\Leftrightarrow 2x^2 + 3x + 1 = 0$ ; $\Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times 1 = 1$

$x_1 = \dfrac{-3 - \sqrt{1}}{2 \times 2} = \dfrac{-4}{4} = -1$ (valeur interdite) $\qquad x_2 = \dfrac{-3 + \sqrt{1}}{2 \times 2} = \dfrac{-2}{4} = \dfrac{-1}{2} \qquad S = \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$

**2)** Résolution de $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+1} = 1$. Valeurs interdites : il faut $x \neq 1$ et $x \neq -1$. Dans ces conditions :

$\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+1} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x-1} \times \dfrac{x+1}{x+1} + \dfrac{1}{x+1} \times \dfrac{x-1}{x-1} = 1$ (réduction au même dénominateur)

$\Leftrightarrow \dfrac{2x}{x^2 - 1} = 1 \Leftrightarrow 2x = x^2 - 1$ (produit en croix) $\Leftrightarrow -x^2 + 2x + 1 = 0$ (on se ramène à 0).

$\Delta = 2^2 - 4 \times (-1) \times 1 = 8$

$x_1 = \dfrac{-2 - \sqrt{8}}{2 \times (-1)} = \dfrac{-2 - 2\sqrt{2}}{-2} = 1 + \sqrt{2} \qquad x_2 = \dfrac{-2 + \sqrt{8}}{2 \times (-1)} = \dfrac{-2 + 2\sqrt{2}}{-2} = 1 - \sqrt{2} \qquad S = \left\{1 + \sqrt{2} ; 1 - \sqrt{2}\right\}$





# 5. Résolution d'inéquations où intervient du second degré

## a) Inéquations de la forme $ax^2 + bx + c > 0$ ou $\geqslant 0$ ou $< 0$ ou $\leqslant 0$ avec $a$, $b$ et $c$ non nuls

### Principe

On détermine d'abord le signe du trinôme sur $\mathbb{R}$, puis on détermine l'ensemble des $x$ vérifiant l'inégalité.

### Exemple(s)

**1)** Résolution de $x^2 + 4x - 5 \leqslant 0$ :

• Étude du signe de $x^2 + 4x - 5$ : $\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times (-5) = 36 > 0$

On applique la règle : « du signe de $a = 1$ à l'extérieur des racines ».

Les racines étant $x_1 = \dfrac{-4 - \sqrt{36}}{2 \times 1} = \dfrac{-10}{2} = -5$ et $x_2 = \dfrac{-4 + \sqrt{36}}{2 \times 1} = \dfrac{2}{2} = 1$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-5$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| signe de $x^2 + 4x - 5$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

• On en déduit que $S = [-5 ; 1]$.

**2)** Résolution de $-2x^2 + 5x - 4 \geqslant 0$ :

• Étude du signe de $-2x^2 + 5x - 4$ : $\Delta = 5^2 - 4 \times (-2) \times (-4) = -7 < 0$

On applique la règle : « toujours du signe de $a = -2$ ».

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| signe de $-2x^2 + 5x - 4$ | | $-$ | |

• On en déduit que $S = \varnothing$.

# 5. Résolution d'inéquations où intervient du second degré

## Exemple(s)

**3)** Résolution de $-2x^2 - 5x + 3 < 0$ :
• Étude du signe de $-2x^2 - 5x + 3$ : $\Delta = (-5)^2 - 4 \times (-2) \times 3 = 49 > 0$
On applique la règle : « du signe de $a = -2$ à l'extérieur des racines ».
Les racines étant $x_1 = \dfrac{-(-5) - \sqrt{49}}{2 \times (-2)} = \dfrac{-2}{-4} = \dfrac{1}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-(-5) + \sqrt{49}}{2 \times (-2)} = \dfrac{12}{-4} = -3$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $\frac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| signe de $-2x^2 - 5x + 3$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | |

• On en déduit que $S = ]-\infty; -3[ \cup \left]\dfrac{1}{2}; +\infty\right[$.

**4)** Résolution de $4x^2 - 4\sqrt{3}x + 3 > 0$ :
• Étude du signe de $4x^2 - 4\sqrt{3}x + 3$ : $\Delta = (-4\sqrt{3})^2 - 4 \times 4 \times 3 = 0$
On applique la règle : « toujours du signe de $a = 4$ et s'annule pour la racine double $x_1$ ».
La racine double étant $x_1 = \dfrac{-(-4\sqrt{3})}{2 \times 4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| signe de $4x^2 - 4\sqrt{3}x + 3$ | | $+$ | 0 | $+$ | |

• On en déduit que $S = \left]-\infty; \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right[ \cup \left]\dfrac{\sqrt{3}}{2}; +\infty\right[$.





# 5. Résolution d'inéquations où intervient du second degré

## Exemple(s)

**5)** Résolution de $x^2 + \sqrt{2}x + 1 > 0$ :
• Étude du signe de $x^2 + \sqrt{2}x + 1$ : $\Delta = (\sqrt{2})^2 - 4 \times 1 \times 1 = -2 < 0$
On applique la règle : « toujours du signe de $a = 1$ ».

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| signe de $x^2 + \sqrt{2}x + 1$ | | $+$ | |

• On en déduit que $S = \mathbb{R}$.

## b) Inéquations de la forme $ax^2 + bx + c > 0$ ou $\geqslant 0$ ou $< 0$ ou $\leqslant 0$ avec $b$ ou $c$ nul

### Principe

Il est en général inutile d'utiliser le discriminant pour établir le signe du trinôme : il suffit de factoriser en produit d'expressions du 1er degré ou de déterminer directement les racines éventuelles.
Voir exemple au paragraphe 1.e)

# 5. Résolution d'inéquations où intervient du second degré

## c) Exemples d'inéquations nécessitant le signe d'expressions du second degré

### Principe

Le produit en croix étant interdit pour les inéquations, on se ramène à $O$ et on transforme l'expression en produit ou quotient de termes du premier ou du second degré. On établit alors un tableau de signes pour déterminer l'ensemble des solutions.

### Exemple(s)

**1)** Résolution de $\dfrac{x-1}{x+1} > 2x$ : $\dfrac{x-1}{x+1} > 2x \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{x+1} - 2x > 0$ (on se ramène à 0)

$\Leftrightarrow \dfrac{x-1}{x+1} - 2x \times \dfrac{x+1}{x+1} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{-2x^2-x-1}{x+1} > 0$ (on réduit au même dénominateur)

On peut alors dresser un tableau de signes :

• Étude du signe de $-2x^2 - x - 1$ : $\Delta = (-1)^2 - 4 \times (-2) \times (-1) = -7 < 0$

On applique la règle : « toujours du signe de $a = -2$ ».

• Étude du signe de $x+1$ : $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

On applique la règle : « signe du coefficient devant $x$ après le 0 ».

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| signe de $-2x^2-x-1$ | | $-$ | | $-$ | |
| signe de $x+1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| signe de $\dfrac{-2x^2-x-1}{x+1}$ | | $\oplus$ | $\Vert$ | $-$ | |

• On en déduit que $S = ]-\infty; -1[$.





# 5. Résolution d'inéquations où intervient du second degré

### Exemple(s)

**2)** Résolution de $\dfrac{-3x^2-x+2}{5x^2-9x-2} \geqslant 0$ : on est déjà ramené à 0 et l'expression est déjà sous la forme d'un quotient de termes du second degré. On peut donc passer directement au tableau de signes.

• Étude du signe de $-3x^2 - x + 2$ : $\Delta = (-1)^2 - 4 \times (-3) \times 2 = 25 > 0$

On applique la règle : « du signe de $a = -3$ à l'extérieur des racines ».

Les racines étant $x_1 = \dfrac{-(-1)-\sqrt{25}}{2\times(-3)} = \dfrac{-4}{-6} = \dfrac{2}{3}$ et $x_2 = \dfrac{-(-1)+\sqrt{25}}{2\times(-3)} = \dfrac{6}{-6} = -1$.

• Étude du signe de $5x^2 - 9x - 2$ : $\Delta = (-9)^2 - 4 \times 5 \times (-2) = 121 > 0$

On applique la règle : « du signe de $a = 5$ à l'extérieur des racines ».

Les racines étant $x_1 = \dfrac{-(-9)-\sqrt{121}}{2\times 5} = \dfrac{-2}{10} = -\dfrac{1}{5}$ et $x_2 = \dfrac{-(-9)+\sqrt{121}}{2\times 5} = \dfrac{20}{10} = 2$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $-\frac{1}{5}$ | | $\frac{2}{3}$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| signe de $-3x^2-x+2$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | |
| signe de $5x^2-9x-2$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| signe de $\dfrac{-3x^2-x+2}{5x^2-9x-2}$ | | $-$ | $0$ | $\oplus$ | $\Vert$ | $-$ | $0$ | $\oplus$ | $\Vert$ | $-$ | |

• On en déduit que $S = \left[-1; -\dfrac{1}{5}\right[ \cup \left[\dfrac{2}{3}; 2\right[$.

## 6. Relation entre les coefficients et les racines d'un trinôme - Application

Propriété(s)

*Si un trinôme défini par* $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ *admet deux racines* $x_1$ *et* $x_2$ *alors on a* $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ *et* $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$.

**Preuve :** $x_1 + x_2 = \frac{-b - \cancel{\sqrt{\Delta}} - b + \cancel{\sqrt{\Delta}}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$.

$x_1 \times x_2 = \frac{\left(-b - \sqrt{\Delta}\right) \times \left(-b + \sqrt{\Delta}\right)}{2a \times 2a} = \frac{(-b)^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{\cancel{b^2} - \cancel{b^2} + 4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$

Propriété(s)

*Dire que deux nombres réels* $u$ *et* $v$ *ont pour somme* $S$ *et pour produit* $P$ *équivaut à dire qu'ils sont solutions de l'équation* $X^2 - SX + P = 0$





## 6. Relation entre les coefficients et les racines d'un trinôme - Application

**Preuve :**

- Si $u$ et $v$ sont tels que $u + v = S$ et $u \times v = P$ alors :
  - $v = S - u$ et $u(S-u) = P$, ce qui implique que $Su - u^2 = P$ et donc que $u^2 - Su + P = 0$
  - $u = S - v$ et $v(S-v) = P$, ce qui implique que $Sv - v^2 = P$ et donc que $v^2 - Sv + P = 0$

$u$ et $v$ sont bien alors solutions de l'équation $X^2 - SX + P = 0$

- Réciproquement, si $u$ et $v$ sont solutions de l'équation $X^2 - SX + P = 0$ alors, d'après la propriété précédente, on a $u + v = -\frac{b}{a} = -\frac{-S}{1} = S$ et $u \times v = \frac{c}{a} = \frac{P}{1} = P$.

Exemple(s)

Déterminer les réels $u$ et $v$ tels que $u + v = 6$ et $u \times v = 1$ équivaut à déterminer les solutions de $X^2 - 6X + 1 = 0$. On a $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 32 > 0$.

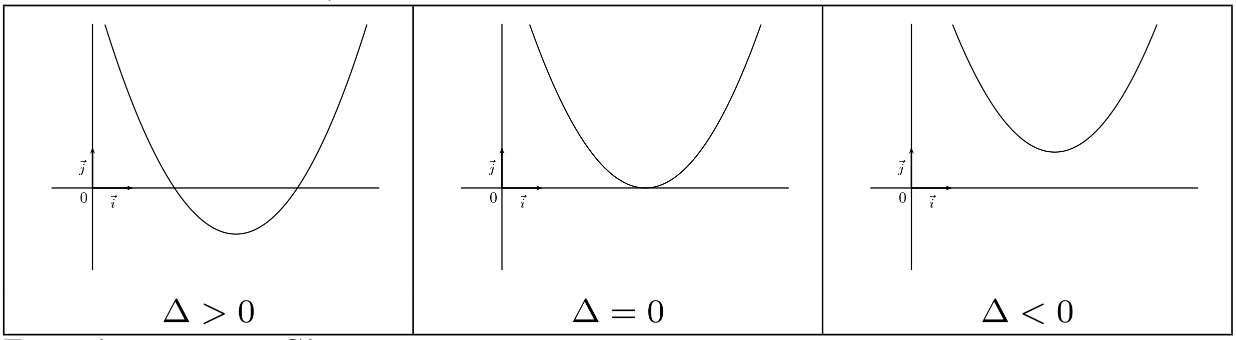
$x_1 = \frac{-(-6) - \sqrt{32}}{2 \times 1} = \frac{6 - 4\sqrt{2}}{2} = 3 - 2\sqrt{2}$ et $x_2 = \frac{-(-6) + \sqrt{32}}{2 \times 1} = \frac{6 + 4\sqrt{2}}{2} = 3 + 2\sqrt{2}$.

On a donc $\begin{cases} u = 3 - 2\sqrt{2} \\ v = 3 + 2\sqrt{2} \end{cases}$ ou $\begin{cases} u = 3 + 2\sqrt{2} \\ v = 3 - 2\sqrt{2} \end{cases}$

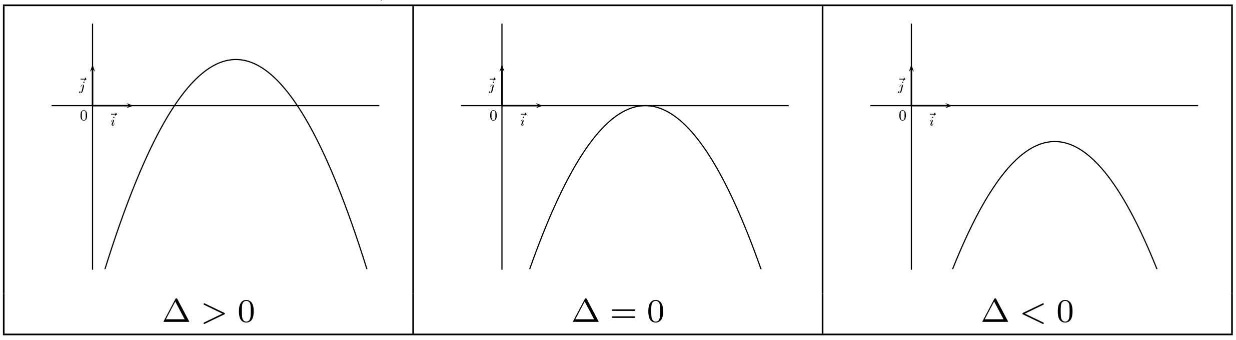
# 7. Représentation graphique d'un trinôme

Soit $f$ le trinôme défini par $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$. La courbe représentative de $f$ est appelée **parabole**.

**Premier cas : Si** $a > 0$




**Deuxième cas : Si** $a < 0$








# 8. Autres applications

## a) Équations bicarrées

### Principe

Ce sont des équations de la forme $ax^4 + bx^2 + c = 0$ (avec $a \neq 0$) qui se résolvent en posant $X = x^2$, en déterminant les solutions de l'équation du second degré $aX^2 + bX + c = 0$ et finalement en déterminant les valeurs de $x$ correspondantes.

### Exemple(s)

Résolution de $2x^4 + 13x^2 - 7 = 0$ : en posant $X = x^2$, l'équation devient $2X^2 + 13X - 7 = 0$.
On a $\Delta = 13^2 - 4 \times 2 \times (-7) = 225$

$X_1 = \dfrac{-13 - \sqrt{225}}{2 \times 2} = \dfrac{-13 - 15}{4} = -7$ et $X_2 = \dfrac{-13 + \sqrt{225}}{2 \times 2} = \dfrac{-13 + 15}{4} = \dfrac{1}{2}$.

On cherche donc les $x$ tels que $x^2 = -7$ (impossible) et $x^2 = \dfrac{1}{2}$. On a donc $S = \left\{ -\sqrt{\dfrac{1}{2}} ; \sqrt{\dfrac{1}{2}} \right\}$

## b) Équations irrationnelles de la forme $\sqrt{A} = B$

### Principe

On ne peut pas procéder par équivalence. On utilise que **si** $\sqrt{A} = B$ **alors** on a $A = B^2$ et, comme la réciproque n'est pas forcément vraie, on doit **vérifier systématiquement** si les $x$ trouvés sont bien des solutions de l'équation initiale.

## 8. Autres applications

Exemple(s)

Résolution de $\sqrt{2x-4} = 2 - x$ :
$\sqrt{2x-4} = 2 - x \Rightarrow 2x - 4 = (2-x)^2 \Rightarrow 2x - 4 = 4 - 4x + x^2 \Rightarrow -x^2 + 6x - 8 = 0$

$$\Delta = 6^2 - 4 \times (-1) \times (-8) = 4\,;\ x_1 = \frac{-6-\sqrt{4}}{2 \times (-1)} = \frac{-6-2}{-2} = 4\,;\ x_2 = \frac{-6+\sqrt{4}}{2 \times (-1)} = \frac{-6+2}{-2} = 2$$

Vérification que les $x$ trouvés sont bien solutions de l'équation initiale :

- Si $x = 4$ on a $\sqrt{2x-4} = \sqrt{2 \times 4 - 4} = \sqrt{4} = 2$ et $2 - x = 2 - 4 = -2$. L'équation initiale n'est pas vérifiée, donc 4 n'est pas une solution.
- Si $x = 2$ on a $\sqrt{2x-4} = \sqrt{2 \times 2 - 4} = 0$ et $2 - x = 2 - 2 = 0$. L'équation initiale est vérifiée, donc 2 est une solution.
- Conclusion : $S = \{2\}$

# Fin du chapitre

xm1math.net