

Spécialité - 1^{re} générale

Second degré

©Pascal Brachet (CC BY NC SA)

<https://www.x1math.net>

1. Rappels sur les équations et inéquations

a) Équations de la forme $ax + b = 0$

Principe

La résolution de ces équations est basée sur les deux opérations suivantes :

- Opération n°1 : $ax + b = 0 \Leftrightarrow ax = -b$ (transposition d'un élément d'un membre à l'autre ; on change le signe de l'élément qu'on transpose)
- Opération n°2 : $ax = -b \Leftrightarrow x = \frac{-b}{a}$ (division par le coefficient devant x ; on ne change pas le signe du coefficient par lequel on divise)

Exemple(s)

- ➊ Résolution de $2x + 3 = 0$: $2x + 3 = 0 \Leftrightarrow 2x = -3 \Leftrightarrow x = \frac{-3}{2} .S = \left\{ -\frac{3}{2} \right\}$
- ➋ Résolution de $3x - 4 = 0$: $3x - 4 = 0 \Leftrightarrow 3x = 4 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3} .S = \left\{ \frac{4}{3} \right\}$
- ➌ Résolution de $7x = 0$: $7x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{0}{7} \Leftrightarrow x = 0 .S = \{0\}$

1. Rappels sur les équations et inéquations

b) Équations sous la forme d'un produit d'expressions du 1^{er} degré égal à zéro ou qui s'y ramène

Principe

On utilise la règle : « Dire qu'un produit de deux facteurs est nul équivaut à dire que le premier facteur est nul OU que le deuxième facteur est nul »

Exemple(s)

1) Résolution de $(2x - 8)(6 - 3x) = 0$:

$$\begin{aligned} (2x - 8)(6 - 3x) = 0 &\Leftrightarrow 2x - 8 = 0 \text{ ou } 6 - 3x = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x = 8 \text{ ou } -3x = -6 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{8}{2} = 4 \text{ ou } x = \frac{-6}{-3} = 2. S = \{4; 2\} \end{aligned}$$

2) Résolution de $4x^2 - 9 = 0$: (on factorise en remarquant la présence de la forme $a^2 - b^2$)

$$\begin{aligned} 4x^2 - 9 = 0 &\Leftrightarrow (2x)^2 - 3^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (2x - 3)(2x + 3) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x - 3 = 0 \text{ ou } 2x + 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x = 3 \text{ ou } 2x = -3 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \text{ ou } x = \frac{-3}{2}. S = \left\{ \frac{3}{2}; -\frac{3}{2} \right\} \end{aligned}$$

1. Rappels sur les équations et inéquations

Exemple(s)

3) Résolution de $x^2 - 4x = 0$: (présence d'un facteur commun)

$$\begin{aligned} x^2 - 4x = 0 &\Leftrightarrow \underline{x} \times x - 4\underline{x} = 0 \\ &\Leftrightarrow \underline{x}(x - 4) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 4. S = \{0; 4\} \end{aligned}$$

c) Équations de la forme $x^2 = a$

Principe

- Si a est strictement négatif, l'équation $x^2 = a$ n'admet aucune solution dans \mathbb{R} ;
- L'équation $x^2 = 0$ admet 0 comme unique solution ;
- Si a est strictement positif, l'équation $x^2 = a$ admet deux solutions : \sqrt{a} et $-\sqrt{a}$.

Exemple(s)

- 1 Résolution de $x^2 = 4$: $x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{4} = 2$ ou $x = -\sqrt{4} = -2$. $S = \{2; -2\}$
- 2 Résolution de $x^2 = -1$: cette équation n'admet aucune solution dans \mathbb{R} . $S = \emptyset$.

1. Rappels sur les équations et inéquations

d) Équations avec l'inconnue au dénominateur

Méthode

- Déterminer les valeurs de l'inconnue qui annulent le(s) dénominateur(s) et donc pour lesquelles l'équation est impossible. C'est ce qu'on appelle déterminer les **valeurs interdites**
- Si possible, se ramener à la forme « **une** fraction = **une** fraction » et utiliser « le produit en croix » :

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \Leftrightarrow A \times D = B \times C$$
- Si cela n'est pas possible, il faut alors se ramener à 0 et se ramener à la forme « **une** fraction = 0 » (par réduction au même dénominateur...) et utiliser que $\frac{A}{B} = 0 \Leftrightarrow A = 0$
- Après détermination des x , vérifier qu'il ne s'agit pas de valeurs interdites avant d'écrire S .

Exemple(s)

Résolution de $\frac{3}{x+2} = \frac{4}{3x}$. Valeurs interdites : il faut $x \neq -2$ et $x \neq 0$. Dans ces conditions,

$$\begin{aligned} \frac{3}{x+2} &= \frac{4}{3x} \Leftrightarrow 3 \times 3x = 4 \times (x+2) \\ &\Leftrightarrow 9x = 4x + 8 \\ &\Leftrightarrow 9x - 4x = 8 \\ &\Leftrightarrow 5x = 8 \\ &\Leftrightarrow \frac{8}{5} = x. S = \left\{ \frac{8}{5} \right\} \end{aligned}$$

1. Rappels sur les équations et inéquations

d) signe de $ax + b$

Propriété(s)

Le signe de $ax + b$ (avec $a \neq 0$) suivant les valeurs de x est donné par le tableau :

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
signe de $ax + b$	signe de $-a$	0	signe de a

(Le tableau peut se résumer avec la règle suivante : signe du coefficient devant x après le « 0 »)

Exemple(s)

Signe de $4x - 8$:

$$4x - 8 = 0 \Leftrightarrow 4x = 8 \Leftrightarrow x = 2$$

Signe du coefficient devant x (ici 4, donc « + ») après le « 0 » :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
signe de $4x - 8$	-	0	+

Signe de $9 - 3x$:

$$9 - 3x = 0 \Leftrightarrow 9 = 3x \Leftrightarrow x = 3$$

Signe du coefficient devant x (ici -3 , donc « - ») après le « 0 » :

x	$-\infty$	3	$+\infty$
signe de $9 - 3x$	+	0	-

1. Rappels sur les équations et inéquations

d) Signe d'un produit ou d'un quotient d'expressions du 1^{er} degré

Principe

- ① Dans un tableau de signes, on inscrit une ligne pour chaque facteur du produit ou du quotient et une ligne finale pour l'expression complète ;
- ② On détermine les valeurs de x qui annulent chaque facteur ;
- ③ On applique la règle « signe du coefficient devant x après le 0 » pour chaque facteur ;
- ④ On applique la règle des signes pour déterminer les signes de l'expression complète dans la dernière ligne en insérant un « 0 » pour chaque valeur de x annulant le produit ou le quotient et une « double barre » pour chaque valeur de x annulant l'éventuel dénominateur (pour indiquer la présence d'une valeur interdite)

Exemple(s)

1. Signe de $2x(x+3)(1-x)$:

- $2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{0}{2} = 0$
- $x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$
- $1 - x = 0 \Leftrightarrow 1 = x$

x	$-\infty$	-3	0	1	$+\infty$
signe de $2x$	-	-	0	+	+
signe de $x+3$	-	0	+	+	+
signe de $1-x$	+	+	+	0	-
signe de $2x(x+3)(1-x)$	+	0	-	0	-

1. Rappels sur les équations et inéquations

Exemple(s)

2. Signe de $\frac{-x}{(3x-6)(x+2)}$:

- $-x = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $3x - 6 = 0 \Leftrightarrow 3x = 6 \Leftrightarrow x = \frac{6}{3} = 2$
- $x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
signe de $-x$	+	+	0	-	-
signe de $3x - 6$	-	-	-	0	+
signe de $x + 2$	-	0	+	+	+
signe de $\frac{-x}{(3x-6)(x+2)}$	+	-	0	+	-

e) Exemple d'inéquations nécessitant un tableau de signe

Exemple(s)

Résolution dans \mathbb{R} de l'inéquation $4x > x^2$.

On se ramène à 0 et on factorise : $4x > x^2 \Leftrightarrow 4x - x^2 > 0 \Leftrightarrow x(4 - x) > 0$

x	$-\infty$	$0 \leftrightarrow 4$	$+\infty$
x	-	+	+
$4 - x$	+	0	-
$x(4 - x)$	-	+	-

Les valeurs de x pour lesquelles on a « + » dans la dernière ligne nous donne $S =]0; 4[$.

2. Second degré : définitions

a) Trinôme du second degré

Définition

Toute fonction f définie sur \mathbb{R} telle que $f(x)$ puisse s'écrire sous la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$) est appelée **trinôme du second degré**.

Exemple(s)

- ❶ Pour f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$, on a $a = \dots$; $b = \dots$ et $c = \dots$
- ❷ Pour f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3$, on a $a = \dots$; $b = \dots$ et $c = \dots$
- ❸ Pour f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = -\sqrt{2}x^2 + 7x$, on a $a = \dots$; $b = \dots$ et $c = \dots$

b) Racines d'un trinôme du second degré

Définition

On appelle **racine** d'un trinôme f défini par $f(x) = ax^2 + bx + c$ toute valeur de x qui annule f .

Exemple(s)

Soit f le trinôme défini par $f(x) = 2x^2 - 3x - 5$.

a) 1 est-il une racine de f ?

b) -1 est-il une racine de f ?

3. Factorisation, signe et racines d'un trinôme du second degré

a) Forme canonique

$$\text{Pour tout } x, a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right) \right] = a \left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{\cancel{b^2}}{\cancel{4a^2}} - \frac{\cancel{b^2}}{\cancel{4a^2}} + \frac{4ac}{4a^2} \right] = ax^2 + bx + c$$

Définition

Étant donné le trinôme défini par $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) :

- On appelle **discriminant** de f le réel, noté Δ , tel que $\Delta = b^2 - 4ac$.
- L'écriture de $f(x)$ sous la forme $f(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$ est appelée **forme canonique** du trinôme.

b) Cas où $\Delta < 0$:

$$\text{On a, pour tout } x, f(x) = a \underbrace{\left[\underbrace{\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{\overbrace{(-\Delta)}^{>0}}{4a^2}}_{>0} \right]}_{>0}$$

3. Factorisation, signe et racines d'un trinôme du second degré

On en déduit que :

- *Racines* : comme $a \neq 0$, $f(x)$ ne peut pas s'annuler dans \mathbb{R}
- *Factorisation* : $f(x)$ ne peut pas se factoriser en produit d'expressions du 1^{er} degré dans \mathbb{R}
- *Signe* : pour tout x , $f(x)$ a le même signe que a

c) Cas où $\Delta = 0$:

On a, pour tout x , $f(x) = a \underbrace{\left[x + \frac{b}{2a} \right]^2}_{\geq 0}$

On en déduit que :

- *Racines* : comme $a \neq 0$, $f(x) = 0 \Leftrightarrow \left[x + \frac{b}{2a} \right]^2 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a}$. f n'admet qu'une seule racine (dite « double ») : $x_1 = -\frac{b}{2a}$
- *Factorisation* : pour tout x $f(x) = a(x - x_1)^2$
- *Signe* : pour tout x , $f(x)$ a le même signe que a , mais s'annule pour la racine double

3. Factorisation, signe et racines d'un trinôme du second degré

d) Cas où $\Delta > 0$:

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } x, \text{ on a } f(x) &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] = a \overbrace{\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 \right]}^{\text{forme } A^2 - B^2} \\ &= a \overbrace{\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)}^{A+B} \overbrace{\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)}^{A-B} = a \left(x - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right) \left(x - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right) \\ \text{En posant } x_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ on a } f(x) = a(x - x_1)(x - x_2), \text{ pour tout } x. \end{aligned}$$

On en déduit que :

- *Racines* : comme $a \neq 0$, $f(x) = 0 \Leftrightarrow x - x_1 = 0$ ou $x - x_2 = 0$. f admet 2 racines : x_1 et x_2 .
- *Factorisation* : pour tout x $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$
- *Signe* : (en supposant que $x_1 < x_2$)

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$x - x_1$	-	0	+	+	
$x - x_2$	-	-	0	+	
$(x - x_1)(x - x_2)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a

3. Factorisation, signe et racines d'un trinôme du second degré

e) Tableau récapitulatif (ce qu'il faut apprendre)

Étant donné le trinôme défini par $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

$\Delta = b^2 - 4ac$	Racines	Factorisation de $f(x)$	Signe										
Si $\Delta > 0$	Deux racines : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$	$a(x - x_1)(x - x_2)$	<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td style="text-align: center;">x</td> <td style="text-align: center;">$-\infty$</td> <td style="text-align: center;">x_1</td> <td style="text-align: center;">x_2</td> <td style="text-align: center;">$+\infty$</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">$ax^2 + bx + c$</td> <td colspan="2" style="text-align: center;">signe de a 0</td> <td colspan="2" style="text-align: center;">signe de $(-a)$ 0</td> </tr> </table> <p style="text-align: center;">(en supposant que $x_1 < x_2$) « Du signe de a à l'extérieur des racines »</p>	x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	$ax^2 + bx + c$	signe de a 0		signe de $(-a)$ 0	
x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$									
$ax^2 + bx + c$	signe de a 0		signe de $(-a)$ 0										
Si $\Delta = 0$	Une racine (dite double) : $x_1 = \frac{-b}{2a}$	$a(x - x_1)^2$	<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td style="text-align: center;">x</td> <td style="text-align: center;">$-\infty$</td> <td style="text-align: center;">x_1</td> <td style="text-align: center;">$+\infty$</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">$ax^2 + bx + c$</td> <td colspan="2" style="text-align: center;">signe de a 0</td> <td style="text-align: center;">signe de a</td> </tr> </table> <p style="text-align: center;">« Toujours du signe de a et s'annule pour la racine »</p>	x	$-\infty$	x_1	$+\infty$	$ax^2 + bx + c$	signe de a 0		signe de a		
x	$-\infty$	x_1	$+\infty$										
$ax^2 + bx + c$	signe de a 0		signe de a										
Si $\Delta < 0$	Pas de racines	Pas de factorisation	<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td style="text-align: center;">x</td> <td style="text-align: center;">$-\infty$</td> <td style="text-align: center;">$+\infty$</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">$ax^2 + bx + c$</td> <td colspan="2" style="text-align: center;">signe de a</td> </tr> </table> <p style="text-align: center;">« Toujours du signe de a »</p>	x	$-\infty$	$+\infty$	$ax^2 + bx + c$	signe de a					
x	$-\infty$	$+\infty$											
$ax^2 + bx + c$	signe de a												

4. Résolution d'équations où intervient du second degré

a) Équations de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec a, b et c non nuls

Principe

Résoudre une telle équation revient à déterminer les racines du trinôme défini par $f(x) = ax^2 + bx + c$ à l'aide de Δ .

Exemple(s)

1) Résolution de $x^2 + 2x - 3 = 0$: $a = 1, b = 2, c = -3, \Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16$.

$$x_1 = \frac{-2 - \sqrt{16}}{2 \times 1} = \frac{-6}{2} = -3 \qquad x_2 = \frac{-2 + \sqrt{16}}{2 \times 1} = \frac{2}{2} = 1 \qquad S = \{-3; 1\}$$

2) Résolution de $-7x^2 + 6x + 1 = 0$: $a = -7, b = 6, c = 1, \Delta = 6^2 - 4 \times (-7) \times 1 = 64$.

$$x_1 = \frac{-6 - \sqrt{64}}{2 \times (-7)} = \frac{-14}{-14} = 1 \qquad x_2 = \frac{-6 + \sqrt{64}}{2 \times (-7)} = \frac{2}{-14} = -\frac{1}{7} \qquad S = \left\{1; -\frac{1}{7}\right\}$$

3) Résolution de $x^2 - 5x + 8 = 0$: $a = 1, b = -5, c = 8, \Delta = 5^2 - 4 \times 1 \times 8 = -7. S = \emptyset$

4) Résolution de $2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$: $a = 2, b = -2\sqrt{2}, c = 1, \Delta = (-2\sqrt{2})^2 - 4 \times 2 \times 1 = 0$.

$$x_1 = \frac{-(-2\sqrt{2})}{2 \times 2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad S = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$$

5) Résolution de $\sqrt{2}x^2 - 3x + \sqrt{2} = 0$: $a = \sqrt{2}, b = -3, c = \sqrt{2}, \Delta = (-3)^2 - 4 \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 1$.

$$x_1 = \frac{-(-3) - \sqrt{1}}{2 \times \sqrt{2}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad x_2 = \frac{-(-3) + \sqrt{1}}{2 \times \sqrt{2}} = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \qquad S = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{2}{\sqrt{2}} \right\}$$

4. Résolution d'équations où intervient du second degré

b) Équations de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec b ou c nul

Inutile de calculer Δ : on factorise ou on utilise la propriété sur les équations de la forme $x^2 = a$.

c) Exemples d'équations se ramenant à des équations du second degré

Exemple(s)

1) Résolution de $\frac{x^2 - 4x - 5}{11x + 11} = -\frac{1}{2}$. Valeur interdite : il faut $11x + 11 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$.

Dans ces conditions : $\frac{x^2 - 4x - 5}{11x + 11} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2(x^2 - 4x - 5) = -(11x + 11)$ (produit en croix)

$\Leftrightarrow 2x^2 - 8x - 10 = -11x - 11 \Leftrightarrow 2x^2 - 8x - 10 + 11x + 11 = 0$ (on se ramène à 0)

$\Leftrightarrow 2x^2 + 3x + 1 = 0$; $\Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times 1 = 1$

$$x_1 = \frac{-3 - \sqrt{1}}{2 \times 2} = \frac{-4}{4} = -1 \text{ (valeur interdite)} \quad x_2 = \frac{-3 + \sqrt{1}}{2 \times 2} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2} \quad S = \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$$

2) Résolution de $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = 1$. Valeurs interdites : il faut $x \neq 1$ et $x \neq -1$. Dans ces conditions :

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} \times \frac{x+1}{x+1} + \frac{1}{x+1} \times \frac{x-1}{x-1} = 1 \text{ (réduction au même dénominateur)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x}{x^2 - 1} = 1 \Leftrightarrow 2x = x^2 - 1 \text{ (produit en croix)} \Leftrightarrow -x^2 + 2x + 1 = 0 \text{ (on se ramène à 0).}$$

$$\Delta = 2^2 - 4 \times (-1) \times 1 = 8$$

$$x_1 = \frac{-2 - \sqrt{8}}{2 \times (-1)} = \frac{-2 - 2\sqrt{2}}{-2} = 1 + \sqrt{2} \quad x_2 = \frac{-2 + \sqrt{8}}{2 \times (-1)} = \frac{-2 + 2\sqrt{2}}{-2} = 1 - \sqrt{2} \quad S = \{1 + \sqrt{2}; 1 - \sqrt{2}\}$$

5. Résolution d'inéquations où intervient du second degré

a) Inéquations de la forme $ax^2 + bx + c > 0$ ou ≥ 0 ou < 0 ou ≤ 0 avec a, b et c non nuls

Principe

On détermine d'abord le signe du trinôme sur \mathbb{R} , puis on détermine l'ensemble des x vérifiant l'inégalité.

Exemple(s)

1) Résolution de $x^2 + 4x - 5 \leq 0$:

• Étude du signe de $x^2 + 4x - 5$: $\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times (-5) = 36 > 0$

On applique la règle : « du signe de $a = 1$ à l'extérieur des racines ».

Les racines étant $x_1 = \frac{-4 - \sqrt{36}}{2 \times 1} = \frac{-10}{2} = -5$ et $x_2 = \frac{-4 + \sqrt{36}}{2 \times 1} = \frac{2}{2} = 1$.

x	$-\infty$	-5	1	$+\infty$	
signe de $x^2 + 4x - 5$	+	0	⊖	0	+

• On en déduit que $S = [-5; 1]$.

2) Résolution de $-2x^2 + 5x - 4 \geq 0$:

• Étude du signe de $-2x^2 + 5x - 4$: $\Delta = 5^2 - 4 \times (-2) \times (-4) = -7 < 0$

On applique la règle : « toujours du signe de $a = -2$ ».

x	$-\infty$	$+\infty$
signe de $-2x^2 + 5x - 4$	-	

• On en déduit que $S = \emptyset$.

5. Résolution d'inéquations où intervient du second degré

Exemple(s)

3) Résolution de $-2x^2 - 5x + 3 < 0$:

• Étude du signe de $-2x^2 - 5x + 3$: $\Delta = (-5)^2 - 4 \times (-2) \times 3 = 49 > 0$

On applique la règle : « du signe de $a = -2$ à l'extérieur des racines ».

Les racines étant $x_1 = \frac{-(-5) - \sqrt{49}}{2 \times (-2)} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{-(-5) + \sqrt{49}}{2 \times (-2)} = \frac{12}{-4} = -3$.

x	$-\infty$	-3	$\frac{1}{2}$	$+\infty$	
signe de $-2x^2 - 5x + 3$	\ominus	0	$+$	0	\ominus

• On en déduit que $S =]-\infty; -3[\cup]\frac{1}{2}; +\infty[$.

4) Résolution de $4x^2 - 4\sqrt{3}x + 3 > 0$:

• Étude du signe de $4x^2 - 4\sqrt{3}x + 3$: $\Delta = (-4\sqrt{3})^2 - 4 \times 4 \times 3 = 0$

On applique la règle : « toujours du signe de $a = 4$ et s'annule pour la racine double x_1 ».

La racine double étant $x_1 = \frac{-(-4\sqrt{3})}{2 \times 4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

x	$-\infty$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$+\infty$
signe de $4x^2 - 4\sqrt{3}x + 3$	\oplus	0	\oplus

• On en déduit que $S =]-\infty; \frac{\sqrt{3}}{2}[\cup]\frac{\sqrt{3}}{2}; +\infty[$.

5. Résolution d'inéquations où intervient du second degré

Exemple(s)

5) Résolution de $x^2 + \sqrt{2}x + 1 > 0$:

- Étude du signe de $x^2 + \sqrt{2}x + 1$: $\Delta = (\sqrt{2})^2 - 4 \times 1 \times 1 = -2 < 0$

On applique la règle : « toujours du signe de $a = 1$ ».

x	$-\infty$	$+\infty$
signe de $x^2 + \sqrt{2}x + 1$	\oplus	

- On en déduit que $S = \mathbb{R}$.

b) Inéquations de la forme $ax^2 + bx + c > 0$ ou ≥ 0 ou < 0 ou ≤ 0 avec b ou c nul

Principe

Il est en général inutile d'utiliser le discriminant pour établir le signe du trinôme : il suffit de factoriser en produit d'expressions du 1^{er} degré ou de déterminer directement les racines éventuelles.

Voir exemple au paragraphe 1.e)

5. Résolution d'inéquations où intervient du second degré

c) Exemples d'inéquations nécessitant le signe d'expressions du second degré

Principe

Le produit en croix étant interdit pour les inéquations, on se ramène à O et on transforme l'expression en produit ou quotient de termes du premier ou du second degré. On établit alors un tableau de signes pour déterminer l'ensemble des solutions.

Exemple(s)

1) Résolution de $\frac{x-1}{x+1} > 2x$: $\frac{x-1}{x+1} > 2x \Leftrightarrow \frac{x-1}{x+1} - 2x > 0$ (on se ramène à 0)

$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{x+1} - 2x \times \frac{x+1}{x+1} > 0 \Leftrightarrow \frac{-2x^2 - x - 1}{x+1} > 0 \text{ (on réduit au même dénominateur)}$$

On peut alors dresser un tableau de signes :

- Étude du signe de $-2x^2 - x - 1$: $\Delta = (-1)^2 - 4 \times (-2) \times (-1) = -7 < 0$

On applique la règle : « toujours du signe de $a = -2$ ».

- Étude du signe de $x+1$: $x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

On applique la règle : « signe du coefficient devant x après le 0 ».

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
signe de $-2x^2 - x - 1$	-		-
signe de $x+1$	-	0	+
signe de $\frac{-2x^2 - x - 1}{x+1}$	\oplus		-

- On en déduit que $S =]-\infty; -1[$.

5. Résolution d'inéquations où intervient du second degré

Exemple(s)

2) Résolution de $\frac{-3x^2 - x + 2}{5x^2 - 9x - 2} \geq 0$: on est déjà ramené à 0 et l'expression est déjà sous la forme d'un quotient de termes du second degré. On peut donc passer directement au tableau de signes.

• Étude du signe de $-3x^2 - x + 2$: $\Delta = (-1)^2 - 4 \times (-3) \times 2 = 25 > 0$
On applique la règle : « du signe de $a = -3$ à l'extérieur des racines ».

Les racines étant $x_1 = \frac{-(-1) - \sqrt{25}}{2 \times (-3)} = \frac{-4}{-6} = \frac{2}{3}$ et $x_2 = \frac{-(-1) + \sqrt{25}}{2 \times (-3)} = \frac{6}{-6} = -1$.

• Étude du signe de $5x^2 - 9x - 2$: $\Delta = (-9)^2 - 4 \times 5 \times (-2) = 121 > 0$
On applique la règle : « du signe de $a = 5$ à l'extérieur des racines ».

Les racines étant $x_1 = \frac{-(-9) - \sqrt{121}}{2 \times 5} = \frac{-2}{10} = -\frac{1}{5}$ et $x_2 = \frac{-(-9) + \sqrt{121}}{2 \times 5} = \frac{20}{10} = 2$.

x	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{3}$	2	$+\infty$
signe de $-3x^2 - x + 2$	-	0	+	+	0	-
signe de $5x^2 - 9x - 2$	+	+	0	-	-	0
signe de $\frac{-3x^2 - x + 2}{5x^2 - 9x - 2}$	-	0	⊕	-	0	⊕

• On en déduit que $S = \left[-1; -\frac{1}{5}\right] \cup \left[\frac{2}{3}; 2\right]$.

6. Relation entre les coefficients et les racines d'un trinôme - Application

Propriété(s)

Si un trinôme défini par $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) admet deux racines x_1 et x_2 alors on a $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ et $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$.

$$\text{Preuve : } x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta} - b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}.$$

$$x_1 \times x_2 = \frac{(-b - \sqrt{\Delta}) \times (-b + \sqrt{\Delta})}{2a \times 2a} = \frac{(-b)^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Propriété(s)

Dire que deux nombres réels u et v ont pour somme S et pour produit P équivaut à dire qu'ils sont solutions de l'équation $X^2 - SX + P = 0$

6. Relation entre les coefficients et les racines d'un trinôme - Application

Preuve :

• Si u et v sont tels que $u + v = S$ et $u \times v = P$ alors :

• $v = S - u$ et $u(S - u) = P$, ce qui implique que $Su - u^2 = P$ et donc que $u^2 - Su + P = 0$

• $u = S - v$ et $v(S - v) = P$, ce qui implique que $Sv - v^2 = P$ et donc que $v^2 - Sv + P = 0$

u et v sont bien alors solutions de l'équation $X^2 - SX + P = 0$

• Réciproquement, si u et v sont solutions de l'équation $X^2 - SX + P = 0$ alors, d'après la propriété précédente, on a $u + v = -\frac{b}{a} = -\frac{-S}{1} = S$ et $u \times v = \frac{c}{a} = \frac{P}{1} = P$.

Exemple(s)

Déterminer les réels u et v tels que $u + v = 6$ et $u \times v = 1$ équivaut à déterminer les solutions de $X^2 - 6X + 1 = 0$. On a $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 32 > 0$.

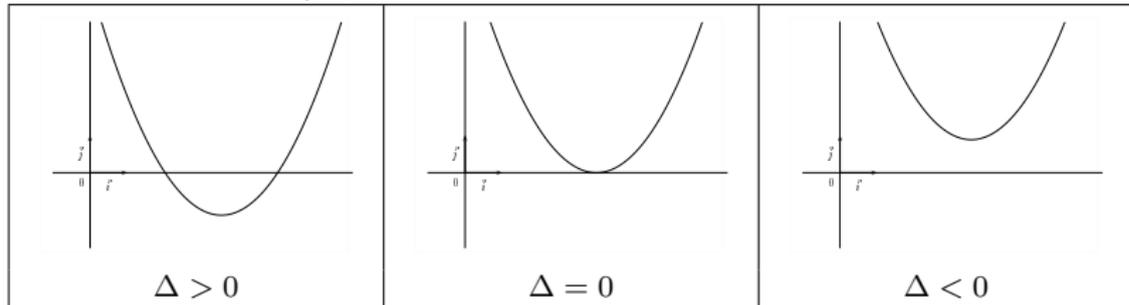
$$x_1 = \frac{-(-6) - \sqrt{32}}{2 \times 1} = \frac{6 - 4\sqrt{2}}{2} = 3 - 2\sqrt{2} \text{ et } x_2 = \frac{-(-6) + \sqrt{32}}{2 \times 1} = \frac{6 + 4\sqrt{2}}{2} = 3 + 2\sqrt{2}.$$

$$\text{On a donc } \begin{cases} u = 3 - 2\sqrt{2} \\ v = 3 + 2\sqrt{2} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} u = 3 + 2\sqrt{2} \\ v = 3 - 2\sqrt{2} \end{cases}$$

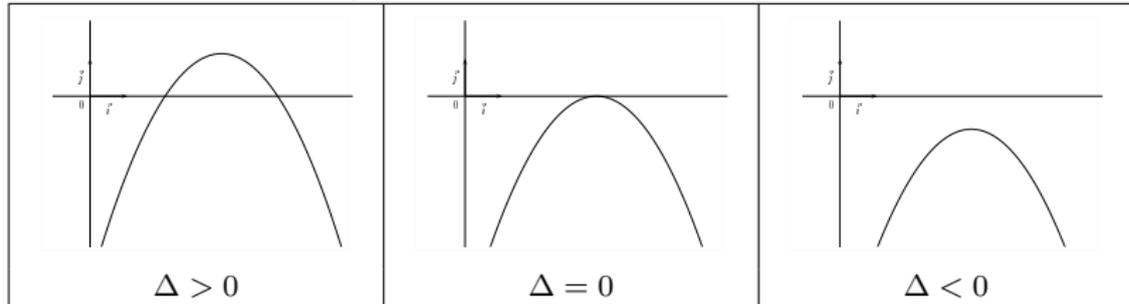
7. Représentation graphique d'un trinôme

Soit f le trinôme défini par $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$). La courbe représentative de f est appelée **parabole**.

Premier cas : Si $a > 0$



Deuxième cas : Si $a < 0$



8. Autres applications

a) Équations bicarrées

Principe

Ce sont des équations de la forme $ax^4 + bx^2 + c = 0$ (avec $a \neq 0$) qui se résolvent en posant $X = x^2$, en déterminant les solutions de l'équation du second degré $aX^2 + bX + c = 0$ et finalement en déterminant les valeurs de x correspondantes.

Exemple(s)

Résolution de $2x^4 + 13x^2 - 7 = 0$: en posant $X = x^2$, l'équation devient $2X^2 + 13X - 7 = 0$.
On a $\Delta = 13^2 - 4 \times 2 \times (-7) = 225$

$$X_1 = \frac{-13 - \sqrt{225}}{2 \times 2} = \frac{-13 - 15}{4} = -7 \text{ et } X_2 = \frac{-13 + \sqrt{225}}{2 \times 2} = \frac{-13 + 15}{4} = \frac{1}{2}.$$

On cherche donc les x tels que $x^2 = -7$ (impossible) et $x^2 = \frac{1}{2}$. On a donc $S = \left\{ -\sqrt{\frac{1}{2}}; \sqrt{\frac{1}{2}} \right\}$

b) Équations irrationnelles de la forme $\sqrt{A} = B$

Principe

On ne peut pas procéder par équivalence. On utilise que **si** $\sqrt{A} = B$ **alors** on a $A = B^2$ et, comme la réciproque n'est pas forcément vraie, on doit **vérifier systématiquement** si les x trouvés sont bien des solutions de l'équation initiale.

8. Autres applications

Exemple(s)

Résolution de $\sqrt{2x-4} = 2-x$:

$$\sqrt{2x-4} = 2-x \Rightarrow 2x-4 = (2-x)^2 \Rightarrow 2x-4 = 4-4x+x^2 \Rightarrow -x^2+6x-8=0$$

$$\Delta = 6^2 - 4 \times (-1) \times (-8) = 4; x_1 = \frac{-6 - \sqrt{4}}{2 \times (-1)} = \frac{-6-2}{-2} = 4; x_2 = \frac{-6 + \sqrt{4}}{2 \times (-1)} = \frac{-6+2}{-2} = 2$$

Vérification que les x trouvés sont bien solutions de l'équation initiale :

- Si $x = 4$ on a $\sqrt{2x-4} = \sqrt{2 \times 4 - 4} = \sqrt{4} = 2$ et $2-x = 2-4 = -2$. L'équation initiale n'est pas vérifiée, donc 4 n'est pas une solution.
- Si $x = 2$ on a $\sqrt{2x-4} = \sqrt{2 \times 2 - 4} = 0$ et $2-x = 2-2 = 0$. L'équation initiale est vérifiée, donc 2 est une solution.
- Conclusion : $S = \{2\}$

Fin du chapitre