Spécialité - 1re générale

Dérivation

https://www.xm1math.net

1. Introduction

a) Comportement d'une expression dépendant de h quand h se rapproche de 0

1re situation

- Compléter les inégalités suivantes :

1. Si $-0,1 \leqslant h \leqslant 0,1$ alors ...... $\leqslant 2+h \leqslant$ ....
2. Si $-0,01 \leqslant h \leqslant 0,01$ alors ...... $\leqslant 2+h \leqslant$ ....
3. Si ...... $\leqslant h \leqslant$ ...... alors $1,999 \leqslant 2+h \leqslant 2,001$.

Réponses :

1. $1,9 \leqslant 2+h \leqslant 2,1$
2. $1,99 \leqslant 2+h \leqslant 2,01$
3. $-0,001 \leqslant h \leqslant 0,001$

- Il semble donc, et on admettra, que l'on peut toujours trouver des h « proche de 0 » pour que $2+h$ soit aussi « proche de 2 » que l'on veut.

On dit alors que $2+h$ tend vers 2 quand h tend vers 0. (notation abrégée : quand $h \to 0$, $2+h \to 2$)

- On peut alors penser, et on admettra, que quand h tend vers 0 :

1. $(2+h)^2$ tend vers ......,
2. $\dfrac{1}{2+h}$ tend vers ......,
3. $\sqrt{2+h}$ tend vers ....

Réponses :

1. $2^2 = 4$
2. $\dfrac{1}{2}$
3. $\sqrt{2}$

Propriété(s)

On admet que, pour tout réel a et pour toute fonction de référence f définie en a :
Quand h tend vers 0, $a+h$ tend vers a et $f(a+h)$ tend vers $f(a)$.

1. Introduction

2e situation

- Compléter les inégalités suivantes :

1. Si $0 < h \leqslant 0,01$ alors $0 < \sqrt{h} \leqslant \ldots\ldots$ et $\dfrac{1}{\sqrt{h}} \geqslant \ldots\ldots$
2. Si $0 < h \leqslant 0,0001$ alors $0 < \sqrt{h} \leqslant \ldots\ldots$ et $\dfrac{1}{\sqrt{h}} \geqslant \ldots\ldots$
3. Si $0 < h \leqslant \ldots\ldots\ldots\ldots$ alors $0 < \sqrt{h} \leqslant 0,001$ et $\dfrac{1}{\sqrt{h}} \geqslant 1000$.

Réponses :

1. $\sqrt{h} \leqslant 0,1$; $\dfrac{1}{\sqrt{h}} \geqslant 10$
2. $\sqrt{h} \leqslant 0,01$; $\dfrac{1}{\sqrt{h}} \geqslant 100$
3. $0 < h \leqslant 0,000001$

- Il semble donc, et on admettra, que l'on peut toujours trouver des h « proche de 0 » pour que $\dfrac{1}{\sqrt{h}}$ soit aussi « grand » que l'on veut.

On dit alors que $\dfrac{1}{\sqrt{h}}$ tend vers $+\infty$ quand h tend vers 0. (notation abrégée : quand $h \to 0$, $\dfrac{1}{\sqrt{h}} \to +\infty$)

1. Introduction

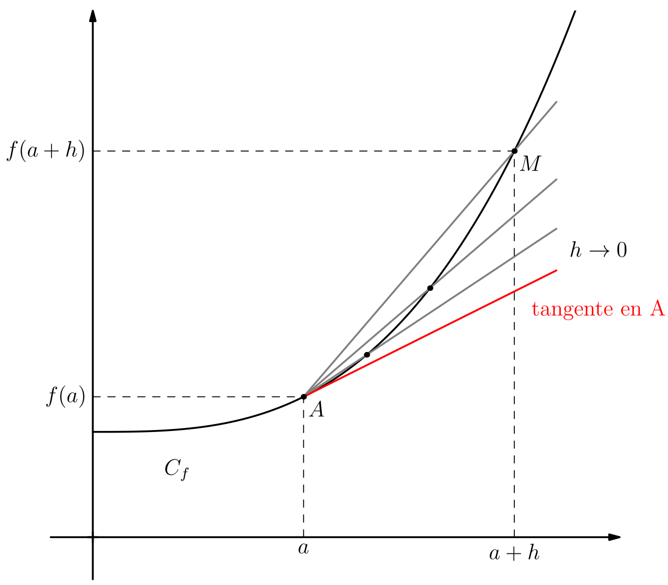
b) Position limite des sécantes à une courbe

Soit f une fonction définie sur intervalle I contenant a et A le point (fixe) de la courbe de f d'abscisse a. Pour tout h (tel que $a+h \in I$), on note M le point (variable) de la courbe de f d'abscisse $a+h$.

Quand on fait tendre h vers 0, le point M se rapproche de A (sans l'atteindre) et la droite (AM) se rapproche d'une droite qui correspond à ce qu'on appelle la **tangente** à la courbe de f en A.

Pour obtenir le coefficient directeur de cette tangente, il suffit de regarder vers quoi tend le coefficient directeur de la droite (AM) quand h tend vers 0. Or, on a vu au chapitre précédent, que le coefficient directeur de la droite (AM) était en fait égal au taux de variation de f entre a et $a+h$, c'est à dire à $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Conclusion : pour déterminer le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse a, il suffit de déterminer vers quoi tend $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ quand h tend vers 0.



2. Nombre dérivé d'une fonction en un point

Définition

Étant donné une fonction f définie sur un intervalle I contenant a.
Si le taux de variation $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers un nombre quand h tend vers 0, on dit que f est dérivable en a et ce nombre, noté $f'(a)$, est appelé **nombre dérivé** de f en a.

Exemple(s)

1. Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2$:
On a vu au chapitre précédent que, pour tout a et pour tout $h \neq 0$, $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = 2a+h$. Quand h tend vers 0, $2a+h$ tend vers $2a$.
On peut en conclure que, pour tout a de $\mathbb{R}$, la fonction carré est dérivable en a et que $f'(a) = 2a$.

2. Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$:
On a vu au chapitre précédent que, pour tous réels $a > 0$ et $h \neq 0$ tel que $a+h > 0$,
$\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \dfrac{-1}{a(a+h)}$. Quand h tend vers 0, $a+h$ tend vers a, donc $a(a+h)$ tend vers a^2 et $\dfrac{-1}{a(a+h)}$ tend vers $\dfrac{-1}{a^2}$.
On peut en conclure que, pour tout $a > 0$, la fonction inverse est dérivable en a et que $f'(a) = \dfrac{-1}{a^2}$.

xm1math.net

2. Nombre dérivé d'une fonction en un point

Exemple(s)

3. Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x}$:
On a vu au chapitre précédent que, pour tous réels $a \geqslant 0$ et $h \neq 0$ tel que $a+h \geqslant 0$,
$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}$.
Deux cas de figure se présentent quand on fait tendre h vers 0 :

- Si $a = 0$ alors $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{1}{\sqrt{0+h}+\sqrt{0}} = \frac{1}{\sqrt{h}}$. Or $\frac{1}{\sqrt{h}}$ ne tend pas vers un nombre, mais vers $+\infty$ quand h tend vers 0. On en conclut que la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.
- Par contre si $a > 0$, $\sqrt{a+h}$ tend vers $\sqrt{a}$, donc $\sqrt{a+h}+\sqrt{a}$ tend vers $2\sqrt{a}$ et $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers $\frac{1}{2\sqrt{a}}$.

4. Soit f la fonction affine définie par $f(x) = mx+p$:
Pour tout a et pour tout $h \neq 0$, $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{m(a+h)+p-(ma+p)}{h} = \frac{mh}{h} = m$. Le taux de variation est donc constamment égal à m et il tend forcément vers m quand h tend vers 0.
On en conclut que pour tout a de $\mathbb{R}$, f est dérivable en a et que $f'(a) = m$.

5. Soit f la fonction définie par $f(x) = |x|$:

- Si $h > 0$, $\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{h}{h} = 1$, qui tend vers 1 quand h tend vers 0 par valeurs positives.
- Si $h > 0$, $\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{-h}{h} = -1$, qui tend vers -1 quand h tend vers 0 par valeurs négatives.

On en déduit que si $\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ tend bien vers un nombre, ce n'est pas le même selon que h tende vers 0 par valeurs positives ou négatives. On en conclut dans ce cas que f n'est pas dérivable en 0.

xm1math.net

3. Fonction dérivée d'une fonction numérique

a) Introduction

On a vu que pour tout réel a, la fonction carré est dérivable en a et que le nombre dérivé en a est $f'(a) = 2a$.
On peut donc créer une nouvelle fonction qui à tout a associe le nombre dérivé de f en a.
Cette fonction va s'appeler fonction dérivée de la fonction carré et, en reprenant la variable x habituelle, elle sera définie par $f'(x) = 2x$.
Oralement et par abus de langage, on dira que « la dérivée de x^2 est $2x$ » alors qu'en toute rigueur, il faudrait dire que la dérivée de la fonction carré est la fonction qui à x associe $2x$.

b) Définition générale

Définition

- Si pour tout a d'un intervalle I, une fonction f est dérivable en a, alors on dit que f est dérivable sur I.
- On note alors f' la fonction, dite fonction dérivée de f, qui à tout a de I associe $f'(a)$, le nombre dérivé de f en a.

xm1math.net

3. Fonction dérivée d'une fonction numérique

c) Fonction dérivée des fonctions usuelles

Propriété(s)

Fonction	***Fonction dérivée***	***Sur***	***Exemples***
$f(x) = m$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$	$f(x) = 3 \Rightarrow f'(x) = 0$
$f(x) = mx + p$	$f'(x) = m$	$\mathbb{R}$	$f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$ $f(x) = 2x - 4 \Rightarrow f'(x) = 2$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$	
$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$	$\mathbb{R}$	
$f(x) = x^4$	$f'(x) = 4x^3$	$\mathbb{R}$	
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$	
$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$	$f'(x) = -\dfrac{2}{x^3}$	$\mathbb{R}^*$	
$f(x) = \dfrac{1}{x^3}$	$f'(x) = -\dfrac{3}{x^4}$	$\mathbb{R}^*$	
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$	

xm1math.net

4. Opérations sur les fonctions dérivables

Pour toute cette partie, I représente un intervalle.

a) Dérivée de $f+g$

Théorème

Si f et g sont deux fonctions dérivables sur I alors $f+g$ est dérivable sur I et $(f+g)'=f'+g'$.

Justification de la formule : $\dfrac{f(a+h)+g(a+h)-(f(a)+g(a))}{h} = \underbrace{\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}}_{\to f'(a)} + \underbrace{\dfrac{g(a+h)-g(a)}{h}}_{\to g'(a)}$

Exemple(s)

1. Si $f(x)=x^2+x$ alors $f'(x) = \overbrace{2x}^{\text{dérivée de } x^2} + \overbrace{1}^{\text{dérivée de } x}$

2. Si $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ alors $f'(x) = \overbrace{1}^{\text{dérivée de } x} + \overbrace{\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)}^{\text{dérivée de } \frac{1}{x}}$

3. $f(x)=(3x+4)+\sqrt{x}$ alors $f'(x) = \overbrace{3}^{\text{dérivée de } 3x+4} + \overbrace{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}^{\text{dérivée de } \sqrt{x}}$

4. Si $f(x)=x^3+x^2+4$ alors $f'(x) = \overbrace{3x^2}^{\text{dérivée de } x^3} + \overbrace{2x}^{\text{dérivée de } x^2} + \overbrace{0}^{\text{dérivée de } 4}$

4. Opérations sur les fonctions dérivables

b) Dérivée de kf (k nombre réel)

Théorème

Si f est une fonction dérivable sur I alors pour tout réel k, kf est dérivable sur I et $(kf)'=kf'$.

Justification de la formule : car $\dfrac{kf(a+h)-kf(a)}{h} = k \times \underbrace{\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}}_{\to f'(a)}$

Exemple(s)

1. Si $f(x)=3x^2$ alors $f'(x) = 3 \times \overbrace{(2x)}^{\text{dérivée de } x^2} = 6x$

2. Si $f(x)=-2\sqrt{x}$ alors $f'(x) = -2 \times \overbrace{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}^{\text{dérivée de } \sqrt{x}} = -\frac{1}{\sqrt{x}}$

3. Si $f(x)=\frac{3}{x} = 3 \times \frac{1}{x}$ alors $f'(x) = 3 \times \overbrace{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}^{\text{dérivée de } \frac{1}{x}} = -\frac{3}{x^2}$

4. Si $f(x)=2x^3+7x^2+8x$ alors

$f'(x) = 2 \times \overbrace{3x^2}^{\text{dérivée de } x^3} + 7 \times \overbrace{2x}^{\text{dérivée de } x^2} + \overbrace{8}^{\text{dérivée de } 8x+1} = 6x^2+14x+8$

4. Opérations sur les fonctions dérivables

c) Dérivée de $f - g$

Théorème

Si f et g sont deux fonctions dérivables sur I alors $f - g$ est dérivable sur I et $(f-g)' = f' - g'$.

Justification de la formule : car $f - g = f + (-1) \times g$, donc $(f-g)' = f' + (-1) \times g'$

Exemple(s)

1. Si $f(x) = x^3 - \sqrt{x}$ alors $f'(x) = \overbrace{3x^2}^{\text{dérivée de } x^3} - \overbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}}^{\text{dérivée de } \sqrt{x}}$

2. Si $f(x) = 4x^2 - \frac{1}{x^2}$ alors $f'(x) = 4 \times \overbrace{2x}^{\text{dérivée de } x^2} - \overbrace{\left(-\frac{2}{x^3}\right)}^{\text{dérivée de } \frac{1}{x^2}} = 8x + \frac{2}{x^3}$

4. Opérations sur les fonctions dérivables

d) Dérivée de fg

Théorème

Si f et g sont deux fonctions dérivables sur I alors fg est dérivable sur I et $(fg)' = f'g + fg'$.

Justification de la formule : car

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \times g(a+h) + f(a) \times \frac{g(a+h)-g(a)}{h} = \frac{f(a+h) \times g(a+h) - f(a) \times g(a)}{h}$$ et

$$\underbrace{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}_{\to f'(a)} \times \underbrace{g(a+h)}_{\to g(a)} + \underbrace{f(a)}_{\to f(a)} \times \underbrace{\frac{g(a+h)-g(a)}{h}}_{\to f'(a)}$$

Exemple(s)

1. Si $f(x) = x \times \sqrt{x}$ alors $f'(x) = \overbrace{1}^{\text{dérivée de } x} \times \sqrt{x} + x \times \overbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}}^{\text{dérivée de } \sqrt{x}}$

2. Si $f(x) = 4x^3 \times (4 + \sqrt{x})$ alors $f'(x) = \overbrace{4 \times 3x^2}^{\text{dérivée de } 4x^3} \times (4 + \sqrt{x}) + 4x^3 \times \overbrace{\left(0 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}^{\text{dérivée de } 4+\sqrt{x}} = 12x^2 + \frac{2x^3}{\sqrt{x}}$

4. Opérations sur les fonctions dérivables

e) Dérivée de f^2

Théorème

Si f est une fonction dérivable sur I alors f^2 est dérivable sur I et $\left(f^2\right) = 2f'f$.

Justification de la formule : car $\left(f^2\right)' = (f \times f)' = f'f + ff'$.

Exemple(s)

1. Si $f(x) = (7x+5)^2$ alors $f'(x) = 2 \times \overbrace{7}^{\text{dérivée de } 7x+5} \times (7x+5) = 14(7x+5)$

2. Si $f(x) = \left(x^3 - 4x^2\right)^2$ alors $f'(x) = 2 \times \overbrace{\left(3x^2 - 4 \times 2x\right)}^{\text{dérivée de } x^3-4x^2} \times \left(x^3 - 4x^2\right) = 2\left(3x^2 - 8x\right)\left(x^3 - 4x^2\right)$

4. Opérations sur les fonctions dérivables

f) Dérivée de $\frac{1}{f}$

Théorème

Si f est une fonction dérivable et qui ne s'annule pas sur I alors $\frac{1}{f}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$.

Justification de la formule : car $f \times \frac{1}{f} = 1$ et donc on doit avoir $\left(f \times \frac{1}{f}\right)' = 0$.

Mais en utilisant la formule du produit, on a aussi $\left(f \times \frac{1}{f}\right)' = f' \times \frac{1}{f} + f \times \left(\frac{1}{f}\right)'$

D'où $f' \times \frac{1}{f} + f \times \left(\frac{1}{f}\right)' = 0 \Rightarrow f \times \left(\frac{1}{f}\right)' = -f' \times \frac{1}{f} \Rightarrow \left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$

Exemple(s)

1. Si $f(x) = \dfrac{1}{5x-1}$ alors $f'(x) = -\dfrac{\overbrace{5}^{\text{dérivée de } 5x-1}}{(5x-1)^2}$

2. Si $f(x) = \dfrac{1}{5x^2+3}$ alors $f'(x) = -\dfrac{\overbrace{5 \times 2x}^{\text{dérivée de } 5x^2+3}}{(5x^2+3)^2} = \dfrac{-10x}{(5x^2+3)^2}$

4. Opérations sur les fonctions dérivables

g) Dérivée de $\frac{f}{g}$

Théorème

Si f et g sont deux fonctions dérivables sur I et si g ne s'annule pas sur I alors $\frac{f}{g}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$.

Justification de la formule : car $\frac{f}{g} = f \times \frac{1}{g}$ et donc, en utilisant la formule du produit,
$\left(\frac{f}{g}\right)' = f' \times \frac{1}{g} + f \times \left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{f'}{g} + f \times \left(-\frac{g'}{g^2}\right) = \frac{f'g}{g^2} - \frac{fg'}{g^2}$

Exemple(s)

1. Si $f(x) = \dfrac{7x}{2x+3}$ alors

$$f'(x) = \frac{\overbrace{(7)}^{\text{dérivée de } 7x} \times (2x+3) - (7x) \times \overbrace{(2)}^{\text{dérivée de } 2x+3}}{(2x+3)^2} = \frac{14x + 21 - 14x}{(2x+3)^2} = \frac{21}{(2x+3)^2}$$

2. Si $f(x) = \dfrac{x^2}{3x+1}$ alors

$$f'(x) = \frac{\overbrace{(2x)}^{\text{dérivée de } x^2} \times (3x+1) - (x^2) \times \overbrace{(3)}^{\text{dérivée de } 3x+1}}{(3x+1)^2} = \frac{6x^2 + 2x - 3x^2}{(3x+1)^2} = \frac{3x^2 + 2x}{(3x+1)^2}$$

4. Opérations sur les fonctions dérivables

h) Bilan

Formules à connaître

Fonction	Fonction dérivée
$f + g$	$f' + g'$
$k\,f \quad (k \text{ réel})$	$k\,f'$
$f\,g$	$f'\,g + f\,g'$

Fonction	Fonction dérivée
f^2	$2\,f'\,f$
$\dfrac{1}{f}$	$-\dfrac{f'}{f^2}$
$\dfrac{f}{g}$	$\dfrac{f'\,g - f\,g'}{g^2}$

5. Tangente à la courbe d'une fonction dérivable

a) Équation

Propriété(s)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I contenant a :

- *La tangente à la courbe de f au point d'abscisse a est la droite passant par le point de la courbe d'abscisse a et dont **le coefficient directeur est égal à** $f'(a)$.*
- *Une équation de cette tangente est $y = f(a) + f'(a)(x - a)$.*

Démonstration L'équation réduite de la tangente est de la forme $y = f'(a)x + p$ puisque son coefficient directeur est $f'(a)$. De plus la tangente doit passer par le point d'abscisse a et d'ordonnée $f(a)$. On doit donc avoir $f(a) = f'(a) \times a + p$. D'où $p = f(a) - af'(a)$.

Ainsi une équation de la tangente est $y = f'(a)x + f(a) - af'(a) \Leftrightarrow y = f(a) + f'(a)(x - a)$

Exemple(s)

1. Équation de la tangente au point d'abscisse 5 de la courbe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3x + 1$: $y = f(5) + f'(5)(x - 5)$

- $f(5) = 5^2 - 3 \times 5 + 1 = 11$
- $f'(x) = 2x - 3$
- $f'(5) = 2 \times 5 - 3 = 7$

Une équation de la tangente est donc : $y = 11 + 7(x - 5) \Leftrightarrow y = 7x - 24$

2. Équation de la tangente au point d'abscisse 2 de la courbe de la fonction f définie sur $]1\,;+\infty[$ par $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$: $y = f(2) + f'(2)(x - 2)$

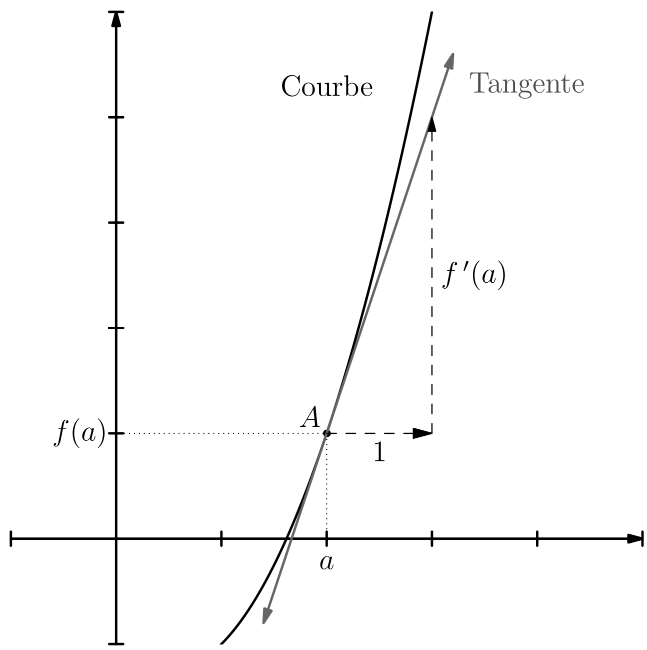
- $f(2) = \frac{2\times2+1}{2-1} = 5$
- $f'(x) = \frac{2\times(x-1)-(2x+1)\times1}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x-1)^2}$
- $f'(2) = \frac{-3}{(2-1)^2} = -3$

Une équation de la tangente est donc : $y = 5 - 3(x - 2) \Leftrightarrow y = -3x + 11$

5. Tangente à la courbe d'une fonction dérivable

b) Construction graphique de la tangente au point d'abscisse a

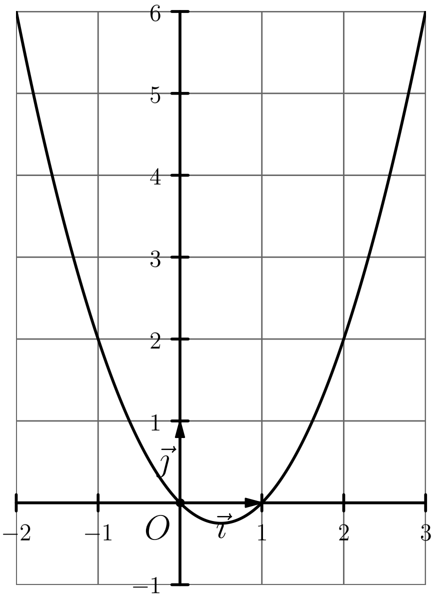
- On part du point de la courbe d'abscisse a ;
- En se décalant horizontalement d'une unité selon l'axe des abscisses, puis verticalement de $f'(a)$ unités selon l'axe des ordonnées, on obtient un deuxième point de la tangente.



5. Tangente à la courbe d'une fonction dérivable

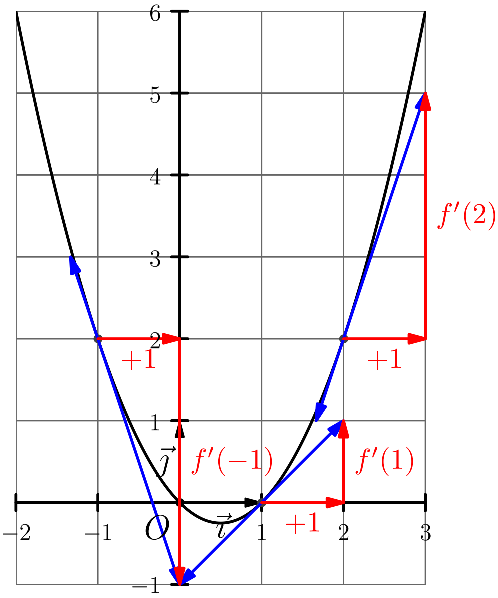
Exemple(s)

On considère la fonction f définie sur $[-2\,;\,3]$ par $f(x) = x^2 - x$ dont la courbe est donnée ci-dessous.



Tracer sur la figure les tangentes à la courbe de f aux poins d'abscisse 1, 2 et -1.

Réponse : On a $f'(x) = 2x - 1$; $f'(1) = 1$; $f'(2) = 3$ et $f'(-1) = -3$.
D'où la construction ci-dessous :



5. Tangente à la courbe d'une fonction dérivable

c) Détermination graphique de la valeur de $f'(a)$ à partir de la tangente au point A d'abscisse a

Principe

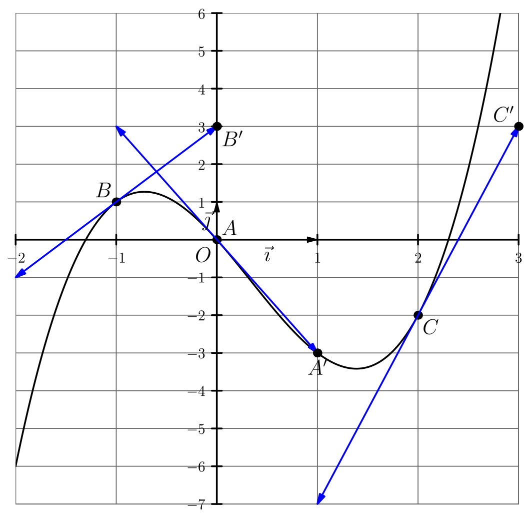
On sait que $f'(a)$ est égal au coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse a.

Donc, si B est un autre point de la tangente, on a $f'(a) = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Exemple(s)

Dans la figure ci-contre est représentée la courbe d'une fonction f dérivable sur $[-2;3]$

1. Sachant que la tangente au point A d'abscisse 0 passe par le point A', déterminer $f'(0)$.
   Réponse : $f'(0)$ est le coefficient directeur de cette tangente, donc $f'(0) = \frac{y_{A'} - y_A}{x_{A'} - x_A} = \frac{-3-0}{1-0} = -3$
2. Sachant que la tangente au point B d'abscisse -1 passe par le point B', déterminer $f'(-1)$.
   Réponse : $f'(-1)$ est le coefficient directeur de cette tangente, donc $f'(-1) = \frac{y_{B'} - y_B}{x_{B'} - x_B} = \frac{3-1}{0-(-1)} = 2$
3. Sachant que la tangente au point C d'abscisse 2 passe par le point C', déterminer $f'(2)$.
   Réponse : $f'(2)$ est le coefficient directeur de cette tangente, donc $f'(2) = \frac{y_{C'} - y_C}{x_{C'} - x_C} = \frac{3-(-2)}{3-2} = 5$



5. Tangente à la courbe d'une fonction dérivable

d) Recherche des éventuels points de la courbe où la tangente admet un certain coefficient directeur égal à m

Principe

Comme le coefficient directeur de la tangente est égal à la valeur de la dérivée, cela revient à chercher les x tels que $f'(x) = m$.

Exemple(s)

Recherche des points éventuels de la courbe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 6x + 5$ où la tangente admettrait un coefficient directeur égal à 4 :

Cela revient à chercher les points où la valeur de la dérivée est égale à 4.
Or, $f'(x) = 4 \Leftrightarrow -2x + 6 = 4 \Leftrightarrow -2x = -2 \Leftrightarrow x = 1$.
On en conclut que seul le point de la courbe de f d'abscisse 1 convient.

6. Dérivée des fonctions de la forme $g(x) = f(ax+b)$

Propriété(s)

On admet que si f est dérivable sur I alors la fonction g définie par $g(x) = f(ax+b)$ (avec $a \neq 0$) est dérivable sur l'intervalle formé des x tels que $ax+b$ soit dans I et on a, $g'(x) = af'(ax+b)$.

Exemple(s)

1. Si $g(x) = \sqrt{5x+2}$ alors $g'(x) = \underbrace{5}_{\text{dérivée de } 5x+2} \times \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{5x+2}}}_{\text{car la dérivée de } \sqrt{x} \text{ est } \frac{1}{2\sqrt{x}}}$.

2. Si $g(x) = \sqrt{1+x^2}$ alors $g'(x) = \underbrace{2x}_{\text{dérivée de } 1+x^2} \times \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}}_{\text{car la dérivée de } \sqrt{x} \text{ est } \frac{1}{2\sqrt{x}}}$.

3. Si $g(x) = \left(1+x^2\right)^3$ alors $g'(x) = \underbrace{2x}_{\text{dérivée de } 1+x^2} \times \underbrace{3\left(1+x^2\right)^2}_{\text{car la dérivée de } x^3 \text{ est } 3x^2}$

Fin du chapitre

xm1math.net