

Spécialité - 1^{re} générale

Dérivation

©Pascal Brachet (CC BY NC SA)

<https://www.xm1math.net>

1. Introduction

a) Comportement d'une expression dépendant de h quand h se rapproche de 0

1^{re} situation

• Compléter les inégalités suivantes :

① Si $-0,1 \leq h \leq 0,1$ alors $\dots \leq 2 + h \leq \dots$

② Si $-0,01 \leq h \leq 0,01$ alors $\dots \leq 2 + h \leq \dots$

③ Si $\dots \leq h \leq \dots$ alors $1,999 \leq 2 + h \leq 2,001$.

• Il semble donc, et on admettra, que l'on peut toujours trouver des h « proche de 0 » pour que $2 + h$ soit aussi « proche de 2 » que l'on veut.

On dit alors que $2 + h$ tend vers 2 quand h tend vers 0. (notation abrégée : quand $h \rightarrow 0$, $2 + h \rightarrow 2$)

• On peut alors penser, et on admettra, que quand h tend vers 0 :

① $(2 + h)^2$ tend vers \dots ,

② $\frac{1}{2 + h}$ tend vers \dots ,

③ $\sqrt{2 + h}$ tend vers \dots

Réponses :

① $1,9 \leq 2 + h \leq 2,1$

② $1,99 \leq 2 + h \leq 2,01$

③ $-0,001 \leq h \leq 0,001$

Réponses :

① $2^2 = 4$

② $\frac{1}{2}$

③ $\sqrt{2}$

Propriété(s)

On admet que, pour tout réel a et pour toute fonction de référence f définie en a :

Quand h tend vers 0, $a + h$ tend vers a et $f(a + h)$ tend vers $f(a)$.

1. Introduction

2^e situation

• Compléter les inégalités suivantes :

① Si $0 < h \leq 0,01$ alors $0 < \sqrt{h} \leq \dots\dots$ et $\frac{1}{\sqrt{h}} \geq \dots\dots$

② Si $0 < h \leq 0,0001$ alors $0 < \sqrt{h} \leq \dots\dots$ et $\frac{1}{\sqrt{h}} \geq \dots\dots$

③ Si $0 < h \leq \dots\dots\dots$ alors $0 < \sqrt{h} \leq 0,001$ et $\frac{1}{\sqrt{h}} \geq 1000$.

• Il semble donc, et on admettra, que l'on peut toujours trouver des h « proche de 0 » pour que $\frac{1}{\sqrt{h}}$ soit aussi « grand » que l'on veut.

On dit alors que $\frac{1}{\sqrt{h}}$ tend vers $+\infty$ quand h tend vers 0. (notation abrégée : quand $h \rightarrow 0$,

$$\frac{1}{\sqrt{h}} \rightarrow +\infty)$$

Réponses :

① $\sqrt{h} \leq 0,1$; $\frac{1}{\sqrt{h}} \geq 10$

② $\sqrt{h} \leq 0,01$; $\frac{1}{\sqrt{h}} \geq 100$

③ $0 < h \leq 0,000001$

1. Introduction

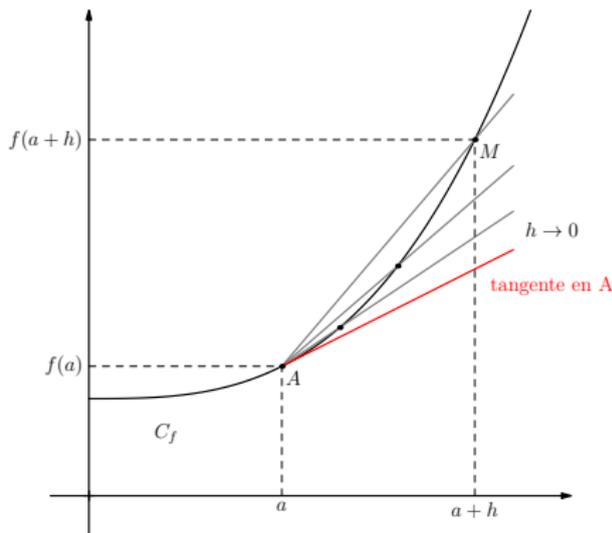
b) Position limite des sécantes à une courbe

Soit f une fonction définie sur intervalle I contenant a et A le point (fixe) de la courbe de f d'abscisse a . Pour tout h (tel que $a + h \in I$), on note M le point (variable) de la courbe de f d'abscisse $a + h$.

Quand on fait tendre h vers 0, le point M se rapproche de A (sans l'atteindre) et la droite (AM) se rapproche d'une droite qui correspond à ce qu'on appelle la **tangente** à la courbe de f en A .

Pour obtenir le coefficient directeur de cette tangente, il suffit de regarder vers quoi tend le coefficient directeur de la droite (AM) quand h tend vers 0. Or, on a vu au chapitre précédent, que le coefficient directeur de la droite (AM) était en fait égal au taux de variation de f entre a et $a + h$, c'est à dire à $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

Conclusion : pour déterminer le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse a , il suffit de déterminer vers quoi tend $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ quand h tend vers 0.



2. Nombre dérivé d'une fonction en un point

Définition

Étant donné une fonction f définie sur un intervalle I contenant a .

Si le taux de variation $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ tend vers un nombre quand h tend vers 0, on dit que f est dérivable en a et ce nombre, noté $f'(a)$, est appelé **nombre dérivé** de f en a .

Exemple(s)

1. Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2$:

On a vu au chapitre précédent que, pour tout a et pour tout $h \neq 0$, $\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = 2a + h$. Quand h tend vers 0, $2a + h$ tend vers $2a$.

On peut en conclure que, pour tout a de \mathbb{R} , la fonction carré est dérivable en a et que $f'(a) = 2a$.

2. Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x}$:

On a vu au chapitre précédent que, pour tous réels $a > 0$ et $h \neq 0$ tel que $a + h > 0$,

$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{-1}{a(a+h)}$. Quand h tend vers 0, $a+h$ tend vers a , donc $a(a+h)$ tend vers a^2 et

$\frac{-1}{a(a+h)}$ tend vers $\frac{-1}{a^2}$.

On peut en conclure que, pour tout $a > 0$, la fonction inverse est dérivable en a et que $f'(a) = \frac{-1}{a^2}$.

2. Nombre dérivé d'une fonction en un point

Exemple(s)

3. Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x}$:

On a vu au chapitre précédent que, pour tous réels $a \geq 0$ et $h \neq 0$ tel que $a + h \geq 0$,

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}.$$

Deux cas de figure se présentent quand on fait tendre h vers 0 :

- Si $a = 0$ alors $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{1}{\sqrt{0+h}+\sqrt{0}} = \frac{1}{\sqrt{h}}$. Or $\frac{1}{\sqrt{h}}$ ne tend pas vers un nombre, mais vers $+\infty$ quand h tend vers 0. On en conclut que la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.
- Par contre si $a > 0$, $\sqrt{a+h}$ tend vers \sqrt{a} , donc $\sqrt{a+h} + \sqrt{a}$ tend vers $2\sqrt{a}$ et $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers $\frac{1}{2\sqrt{a}}$.

4. Soit f la fonction affine définie par $f(x) = mx + p$:

Pour tout a et pour tout $h \neq 0$, $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{m(a+h)+p-(ma+p)}{h} = \frac{mh}{h} = m$. Le taux de variation est donc constamment égal à m et il tend forcément vers m quand h tend vers 0.

On en conclut que pour tout a de \mathbb{R} , f est dérivable en a et que $f'(a) = m$.

5. Soit f la fonction définie par $f(x) = |x|$:

- Si $h > 0$, $\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{h}{h} = 1$, qui tend vers 1 quand h tend vers 0 par valeurs positives.
- Si $h < 0$, $\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{-h}{h} = -1$, qui tend vers -1 quand h tend vers 0 par valeurs négatives.

On en déduit que si $\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ tend bien vers un nombre, ce n'est pas le même selon que h tende vers 0 par valeurs positives ou négatives. On en conclut dans ce cas que f n'est pas dérivable en 0.

3. Fonction dérivée d'une fonction numérique

a) Introduction

On a vu que pour tout réel a , la fonction carré est dérivable en a et que le nombre dérivé en a est $f'(a) = 2a$.

On peut donc créer une nouvelle fonction qui à tout a associe le nombre dérivé de f en a . Cette fonction va s'appeler fonction dérivée de la fonction carré et, en reprenant la variable x habituelle, elle sera définie par $f'(x) = 2x$.

Oralement et par abus de langage, on dira que « la dérivée de x^2 est $2x$ » alors qu'en toute rigueur, il faudrait dire que la dérivée de la fonction carré est la fonction qui à x associe $2x$.

b) Définition générale

Définition

- Si pour tout a d'un intervalle I , une fonction f est dérivable en a , alors on dit que f est dérivable sur I .
- On note alors f' la fonction, dite fonction dérivée de f , qui à tout a de I associe $f'(a)$, le nombre dérivé de f en a .

3. Fonction dérivée d'une fonction numérique

c) Fonction dérivée des fonctions usuelles

Propriété(s)

<i>Fonction</i>	<i>Fonction dérivée</i>	<i>Sur</i>	<i>Exemples</i>
$f(x) = m$	$f'(x) = 0$	\mathbb{R}	$f(x) = 3 \Rightarrow f'(x) = 0$
$f(x) = mx + p$	$f'(x) = m$	\mathbb{R}	$f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$ $f(x) = 2x - 4 \Rightarrow f'(x) = 2$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$	\mathbb{R}	
$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$	\mathbb{R}	
$f(x) = x^4$	$f'(x) = 4x^3$	\mathbb{R}	
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	\mathbb{R}^*	
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$f'(x) = -\frac{2}{x^3}$	\mathbb{R}^*	
$f(x) = \frac{1}{x^3}$	$f'(x) = -\frac{3}{x^4}$	\mathbb{R}^*	
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$	

4. Opérations sur les fonctions dérivables

Pour toute cette partie, I représente un intervalle.

a) Dérivée de $f + g$

Théorème

Si f et g sont deux fonctions dérivables sur I alors $f + g$ est dérivable sur I et $(f + g)' = f' + g'$.

Justification de la formule :

$$\frac{f(a+h) + g(a+h) - (f(a) + g(a))}{h} = \underbrace{\frac{f(a+h) - f(a)}{h}}_{\rightarrow f'(a)} + \underbrace{\frac{g(a+h) - g(a)}{h}}_{\rightarrow g'(a)}$$

Exemple(s)

1. Si $f(x) = x^2 + x$ alors $f'(x) = \underbrace{\text{dérivée de } x^2}_{2x} + \underbrace{\text{dérivée de } x}_1$

2. Si $f(x) = x + \frac{1}{x}$ alors $f'(x) = \underbrace{\text{dérivée de } x}_1 + \underbrace{\text{dérivée de } \frac{1}{x}}_{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}$

3. $f(x) = (3x + 4) + \sqrt{x}$ alors $f'(x) = \underbrace{\text{dérivée de } 3x+4}_3 + \underbrace{\text{dérivée de } \sqrt{x}}_{\frac{1}{2\sqrt{x}}}$

4. Si $f(x) = x^3 + x^2 + 4$ alors $f'(x) = \underbrace{\text{dérivée de } x^3}_{3x^2} + \underbrace{\text{dérivée de } x^2}_{2x} + \underbrace{\text{dérivée de } 4}_0$

4. Opérations sur les fonctions dérivables

b) Dérivée de kf (k nombre réel)

Théorème

Si f est une fonction dérivable sur I alors pour tout réel k , kf est dérivable sur I et $(kf)' = kf'$.

Justification de la formule : car
$$\frac{kf(a+h) - kf(a)}{h} = k \times \underbrace{\frac{f(a+h) - f(a)}{h}}_{\rightarrow f'(a)}$$

Exemple(s)

- Si $f(x) = 3x^2$ alors $f'(x) = 3 \times \overbrace{(2x)}^{\text{dérivée de } x^2} = 6x$
- Si $f(x) = -2\sqrt{x}$ alors $f'(x) = -2 \times \overbrace{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}^{\text{dérivée de } \sqrt{x}} = -\frac{1}{\sqrt{x}}$
- Si $f(x) = \frac{3}{x} = 3 \times \frac{1}{x}$ alors $f'(x) = 3 \times \overbrace{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}^{\text{dérivée de } \frac{1}{x}} = -\frac{3}{x^2}$
- Si $f(x) = 2x^3 + 7x^2 + 8x$ alors

$$f'(x) = 2 \times \overbrace{3x^2}^{\text{dérivée de } x^3} + 7 \times \overbrace{2x}^{\text{dérivée de } x^2} + \overbrace{8}^{\text{dérivée de } 8x+1} = 6x^2 + 14x + 8$$

4. Opérations sur les fonctions dérivables

c) Dérivée de $f - g$

Théorème

Si f et g sont deux fonctions dérivables sur I alors $f - g$ est dérivable sur I et $(f - g)' = f' - g'$.

Justification de la formule : car $f - g = f + (-1) \times g$, donc $(f - g)' = f' + (-1) \times g'$

Exemple(s)

- Si $f(x) = x^3 - \sqrt{x}$ alors $f'(x) = \overbrace{3x^2}^{\text{dérivée de } x^3} - \overbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}}^{\text{dérivée de } \sqrt{x}}$
- Si $f(x) = 4x^2 - \frac{1}{x^2}$ alors $f'(x) = 4 \times \overbrace{2x}^{\text{dérivée de } x^2} - \overbrace{\left(-\frac{2}{x^3}\right)}^{\text{dérivée de } \frac{1}{x^2}} = 8x + \frac{2}{x^3}$

4. Opérations sur les fonctions dérivables

d) Dérivée de fg

Théorème

Si f et g sont deux fonctions dérivables sur I alors fg est dérivable sur I et $(fg)' = f'g + fg'$.

Justification de la formule : car

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \times g(a+h) + f(a) \times \frac{g(a+h) - g(a)}{h} = \frac{f(a+h) \times g(a+h) - f(a) \times g(a)}{h} \text{ et}$$

$$\underbrace{\frac{f(a+h) - f(a)}{h}}_{\rightarrow f'(a)} \times \underbrace{g(a+h)}_{\rightarrow g(a)} + \underbrace{f(a)}_{\rightarrow f(a)} \times \underbrace{\frac{g(a+h) - g(a)}{h}}_{\rightarrow f'(a)}$$

Exemple(s)

- Si $f(x) = x \times \sqrt{x}$ alors $f'(x) = \underbrace{1}_{\text{dérivée de } x} \times \sqrt{x} + x \times \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}}_{\text{dérivée de } \sqrt{x}}$
- Si $f(x) = 4x^3 \times (4 + \sqrt{x})$ alors $f'(x) = \underbrace{4 \times 3x^2}_{\text{dérivée de } 4x^3} \times (4 + \sqrt{x}) + 4x^3 \times \underbrace{\left(0 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}_{\text{dérivée de } 4 + \sqrt{x}} = 12x^2 + \frac{2x^3}{\sqrt{x}}$

4. Opérations sur les fonctions dérivables

e) Dérivée de f^2

Théorème

Si f est une fonction dérivable sur I alors f^2 est dérivable sur I et $(f^2)' = 2f'f$.

Justification de la formule : car $(f^2)' = (f \times f)' = f'f + ff'$.

Exemple(s)

$$1. \text{ Si } f(x) = (7x + 5)^2 \text{ alors } f'(x) = 2 \times \overbrace{7}^{\text{dérivée de } 7x+5} \times (7x + 5) = 14(7x + 5)$$

$$2. \text{ Si } f(x) = (x^3 - 4x^2)^2 \text{ alors } f'(x) = 2 \times \overbrace{(3x^2 - 4 \times 2x)}^{\text{dérivée de } x^3-4x^2} \times (x^3 - 4x^2) = 2(3x^2 - 8x)(x^3 - 4x^2)$$

4. Opérations sur les fonctions dérivables

f) Dérivée de $\frac{1}{f}$

Théorème

Si f est une fonction dérivable et qui ne s'annule pas sur I alors $\frac{1}{f}$ est dérivable sur I et

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}.$$

Justification de la formule : car $f \times \frac{1}{f} = 1$ et donc on doit avoir $\left(f \times \frac{1}{f}\right)' = 0$.

Mais en utilisant la formule du produit, on a aussi $\left(f \times \frac{1}{f}\right)' = f' \times \frac{1}{f} + f \times \left(\frac{1}{f}\right)'$

$$\text{D'où } f' \times \frac{1}{f} + f \times \left(\frac{1}{f}\right)' = 0 \Rightarrow f \times \left(\frac{1}{f}\right)' = -f' \times \frac{1}{f} \Rightarrow \left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$$

Exemple(s)

$$1. \text{ Si } f(x) = \frac{1}{5x-1} \text{ alors } f'(x) = -\frac{\overbrace{5}^{\text{dérivée de } 5x-1}}{(5x-1)^2}$$

$$2. \text{ Si } f(x) = \frac{1}{5x^2+3} \text{ alors } f'(x) = -\frac{\overbrace{5 \times 2x}^{\text{dérivée de } 5x^2+3}}{(5x^2+3)^2} = \frac{-10x}{(5x^2+3)^2}$$

4. Opérations sur les fonctions dérivables

g) Dérivée de $\frac{f}{g}$

Théorème

Si f et g sont deux fonctions dérivables sur I et si g ne s'annule pas sur I alors $\frac{f}{g}$ est dérivable sur

$$I \text{ et } \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Justification de la formule : car $\frac{f}{g} = f \times \frac{1}{g}$ et donc, en utilisant la formule du produit,

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = f' \times \frac{1}{g} + f \times \left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{f'}{g} + f \times \left(-\frac{g'}{g^2}\right) = \frac{f'g}{g^2} - \frac{fg'}{g^2}$$

Exemple(s)

1. Si $f(x) = \frac{7x}{2x+3}$ alors

$$f'(x) = \frac{\underbrace{\text{dérivée de } 7x}_{(7)} \times (2x+3) - (7x) \times \underbrace{\text{dérivée de } 2x+3}_{(2)}}{(2x+3)^2} = \frac{14x + 21 - 14x}{(2x+3)^2} = \frac{21}{(2x+3)^2}$$

2. Si $f(x) = \frac{x^2}{3x+1}$ alors

$$f'(x) = \frac{\underbrace{\text{dérivée de } x^2}_{(2x)} \times (3x+1) - (x^2) \times \underbrace{\text{dérivée de } 3x+1}_{(3)}}{(3x+1)^2} = \frac{6x^2 + 2x - 3x^2}{(3x+1)^2} = \frac{3x^2 + 2x}{(3x+1)^2}$$

4. Opérations sur les fonctions dérivables

h) Bilan

Formules à connaître

Fonction	Fonction dérivée
$f + g$	$f' + g'$
$k f$ (k réel)	$k f'$
$f g$	$f' g + f g'$

Fonction	Fonction dérivée
f^2	$2 f' f$
$\frac{1}{f}$	$-\frac{f'}{f^2}$
$\frac{f}{g}$	$\frac{f' g - f g'}{g^2}$

5. Tangente à la courbe d'une fonction dérivable

a) Équation

Propriété(s)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I contenant a :

- La tangente à la courbe de f au point d'abscisse a est la droite passant par le point de la courbe d'abscisse a et dont le **coefficient directeur est égal à $f'(a)$** .
- Une équation de cette tangente est $y = f(a) + f'(a)(x - a)$.

Démonstration L'équation réduite de la tangente est de la forme $y = f'(a)x + p$ puisque son coefficient directeur est $f'(a)$. De plus la tangente doit passer par le point d'abscisse a et d'ordonnée $f(a)$. On doit donc avoir $f(a) = f'(a) \times a + p$. D'où $p = f(a) - af'(a)$.

Ainsi une équation de la tangente est $y = f'(a)x + f(a) - af'(a) \Leftrightarrow y = f(a) + f'(a)(x - a)$

Exemple(s)

1. Équation de la tangente au point d'abscisse **5** de la courbe de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2 - 3x + 1$: $y = f(5) + f'(5)(x - 5)$

$$\bullet f(5) = 5^2 - 3 \times 5 + 1 = 11 \quad \bullet f'(x) = 2x - 3 \quad \bullet f'(5) = 2 \times 5 - 3 = 7$$

Une équation de la tangente est donc : $y = 11 + 7(x - 5) \Leftrightarrow y = 7x - 24$

2. Équation de la tangente au point d'abscisse **2** de la courbe de la fonction f définie sur $]1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$: $y = f(2) + f'(2)(x - 2)$

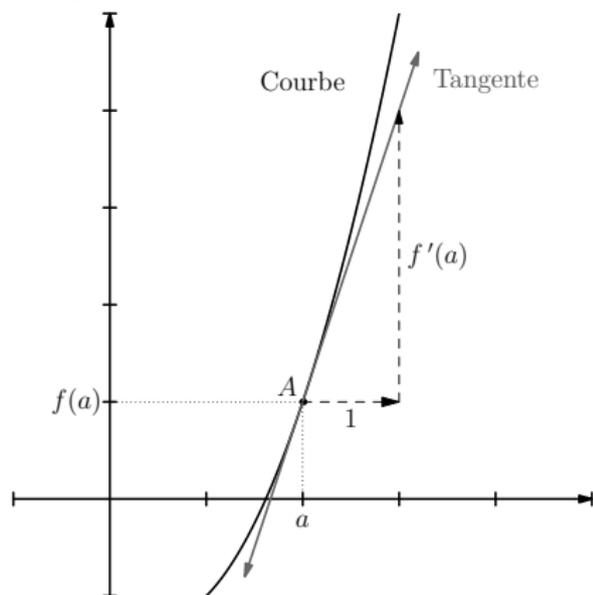
$$\bullet f(2) = \frac{2 \times 2 + 1}{2 - 1} = 5 \quad \bullet f'(x) = \frac{2 \times (x-1) - (2x+1) \times 1}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x-1)^2} \quad \bullet f'(2) = \frac{-3}{(2-1)^2} = -3$$

Une équation de la tangente est donc : $y = 5 - 3(x - 2) \Leftrightarrow y = -3x + 11$

5. Tangente à la courbe d'une fonction dérivable

b) Construction graphique de la tangente au point d'abscisse a

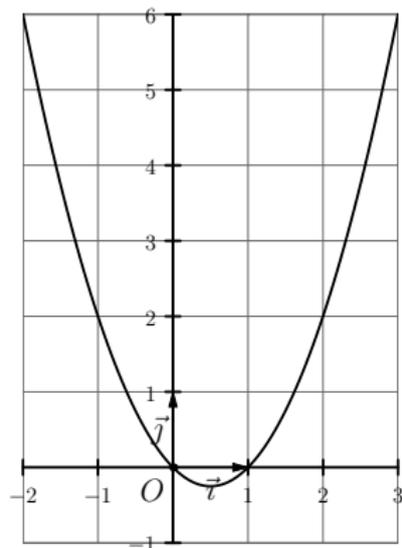
- On part du point de la courbe d'abscisse a ;
- En se décalant horizontalement d'une unité selon l'axe des abscisses, puis verticalement de $f'(a)$ unités selon l'axe des ordonnées, on obtient un deuxième point de la tangente.



5. Tangente à la courbe d'une fonction dérivable

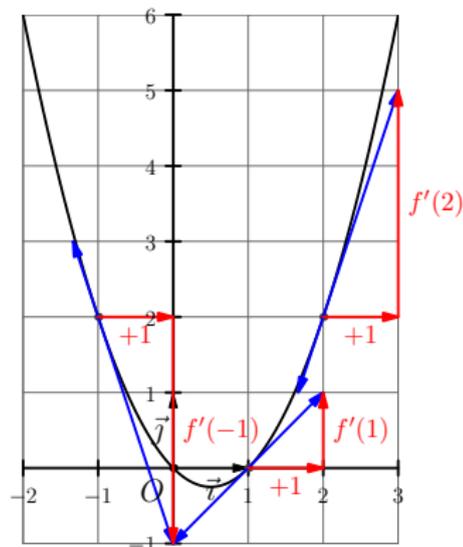
Exemple(s)

On considère la fonction f définie sur $[-2; 3]$ par $f(x) = x^2 - x$ dont la courbe est donnée ci-dessous.



Tracer sur la figure les tangentes à la courbe de f aux points d'abscisse 1, 2 et -1 .

Réponse : On a $f'(x) = 2x - 1$;
 $f'(1) = 1$; $f'(2) = 3$ et $f'(-1) = -3$.
 D'où la construction ci-dessous :



5. Tangente à la courbe d'une fonction dérivable

c) Détermination graphique de la valeur de $f'(a)$ à partir de la tangente au point A d'abscisse a

Principe

On sait que $f'(a)$ est égal au coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse a .

Donc, si B est un autre point de la tangente, on a $f'(a) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Exemple(s)

Dans la figure ci-contre est représentée la courbe d'une fonction f dérivable sur $[-2; 3]$

- ① Sachant que la tangente au point A d'abscisse 0 passe par le point A' , déterminer $f'(0)$.

Réponse : $f'(0)$ est le coefficient directeur de cette

tangente, donc $f'(0) = \frac{y_{A'} - y_A}{x_{A'} - x_A} = \frac{-3 - 0}{1 - 0} = -3$

- ② Sachant que la tangente au point B d'abscisse -1 passe par le point B' , déterminer $f'(-1)$.

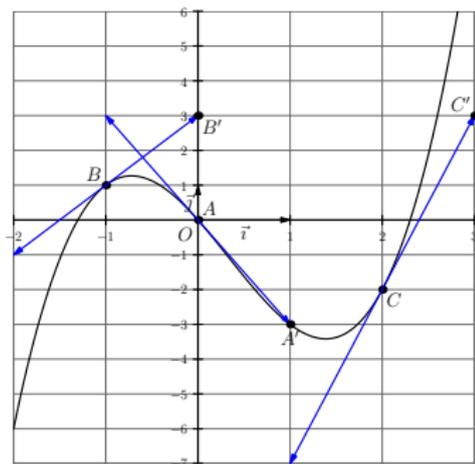
Réponse : $f'(-1)$ est le coefficient directeur de cette

tangente, donc $f'(-1) = \frac{y_{B'} - y_B}{x_{B'} - x_B} = \frac{3 - 1}{0 - (-1)} = 2$

- ③ Sachant que la tangente au point C d'abscisse 2 passe par le point C' , déterminer $f'(2)$.

Réponse : $f'(2)$ est le coefficient directeur de cette

tangente, donc $f'(2) = \frac{y_{C'} - y_C}{x_{C'} - x_C} = \frac{3 - (-2)}{3 - 2} = 5$



5. Tangente à la courbe d'une fonction dérivable

d) Recherche des éventuels points de la courbe où la tangente admet un certain coefficient directeur égal à m

Principe

Comme le coefficient directeur de la tangente est égal à la valeur de la dérivée, cela revient à chercher les x tels que $f'(x) = m$.

Exemple(s)

Recherche des points éventuels de la courbe de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = -x^2 + 6x + 5$ où la tangente admettrait un coefficient directeur égal à 4 :

Cela revient à chercher les points où la valeur de la dérivée est égale à 4.

Or, $f'(x) = 4 \Leftrightarrow -2x + 6 = 4 \Leftrightarrow -2x = -2 \Leftrightarrow x = 1$.

On en conclut que seul le point de la courbe de f d'abscisse 1 convient.

6. Dérivée des fonctions de la forme $g(x) = f(ax + b)$

Propriété(s)

On admet que si f est dérivable sur I alors la fonction g définie par $g(x) = f(ax + b)$ (avec $a \neq 0$) est dérivable sur l'intervalle formé des x tels que $ax + b$ soit dans I et on a, $g'(x) = af'(ax + b)$.

Exemple(s)

- Si $g(x) = \sqrt{5x+2}$ alors $g'(x) = \underbrace{5}_{\text{dérivée de } 5x+2} \times \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{5x+2}}}_{\text{car la dérivée de } \sqrt{x} \text{ est } \frac{1}{2\sqrt{x}}}$.
- Si $g(x) = \sqrt{1+x^2}$ alors $g'(x) = \underbrace{2x}_{\text{dérivée de } 1+x^2} \times \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}}_{\text{car la dérivée de } \sqrt{x} \text{ est } \frac{1}{2\sqrt{x}}}$.
- Si $g(x) = (1+x^2)^3$ alors $g'(x) = \underbrace{2x}_{\text{dérivée de } 1+x^2} \times \underbrace{3(1+x^2)^2}_{\text{car la dérivée de } x^3 \text{ est } 3x^2}$.

Fin du chapitre