

## Suites numériques

### ► Exercice n°1

1.  $U_0 = \frac{0}{3} = 0, U_3 = \frac{6}{6} = 1, U_{n+1} = \frac{2(n+1)}{(n+1)+3} = \frac{2n+2}{n+4}$ .

2.

```
n=int(input("n=?"))
U=2*n/(n+3)
print(U)
```

### ► Exercice n°2

1.  $U_n = \frac{n}{n+1}$ .

2.  $U_9 = \frac{9}{10}, U_{n+1} = \frac{(n+1)}{(n+1)+1} = \frac{n+1}{n+2}$

### ► Exercice n°3

1.  $U_1 = 5 - 3U_0 = 2$  et  $U_2 = 5 - 3U_1 = -1$ .

2.

```
U=1
n=int(input("n=?"))
for i in range(n):
    U=5-3*U
print(U)
```

### ► Exercice n°4

1.  $U_{n+1} = 4U_n - 3$ .

2.  $U_0 = 2$  d'après le script. Dès lors, on a  $U_1 = 4U_0 - 3 = 5$  et  $U_2 = 4U_1 - 3 = 17$ .

### ► Exercice n°5

$$U_n = \frac{1}{n+1}$$

### ► Exercice n°6

$$U_n = n^2 + 1$$

### ► Exercice n°7

$$U_{n+1} = U_n + 12$$

### ► Exercice n°8

$$U_{n+1} = -\frac{1}{2}U_n$$

### ► Exercice n°9

1. Pour tout  $n, U_{n+1} - U_n = 3(n+1) - 7 - 3n + 7 = 3 \geq 0$ .  $(U_n)$  est croissante.

2. Pour tout  $n, U_{n+1} - U_n = -\frac{1}{n+1} \leq 0$ .  $(U_n)$  est décroissante.

### ► Exercice n°10

1. Pour tout  $n, U_n > 0$  et  $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{5}}{\frac{2^n}{5}} = \frac{2^{n+1}}{5} \times \frac{5}{2^n} = 2 \geq 1$ .  $(U_n)$  est croissante.

2. Pour tout  $n, U_n > 0$  et  $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\frac{2^{n+2}}{3^{n+1}}}{\frac{2^{n+1}}{3^n}} = \frac{2^{n+2}}{3^{n+1}} \times \frac{3^n}{2^{n+1}} = \frac{2}{3} \leq 1$ .  $(U_n)$  est décroissante.

### ► Exercice n°11

1. On a  $U_n = f(n)$  avec  $f$  définie sur  $[0; +\infty[$  par  $f(x) = x + x^2$ . Pour tout  $x \geq 0$ ,  $f'(x) = 1 + 2x \geq 0$ .  $f$  est croissante sur  $[0; +\infty[$ , donc  $(U_n)$  est croissante.

2. On a  $U_n = f(n)$  avec  $f$  définie sur  $[0; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{1-x}{x+2}$ . Pour tout  $x \geq 0$ ,  $f'(x) = \frac{-(x+2) - (1-x)}{(x+2)^2} = \frac{-3}{(x+2)^2} \leq 0$ .  $f$  est décroissante sur  $[0; +\infty[$ , donc  $(U_n)$  est décroissante.

### ► Exercice n°12

1. Méthode 2 : Pour tout  $n, U_n > 0$  et  $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{2 \times 5^{n+1}}{2 \times 5^n} = 5 \geq 1$ .  $(U_n)$  est croissante.

2. La méthode 1 est la seule possible car  $U_n$  n'est pas toujours strictement positif et passer par une fonction n'est pas possible à ce niveau. Pour tout  $n, U_{n+1} - U_n = (-3)^{n+1} - (-3)^n = (-3)^n(-3-1) = -4(-3)^n$  qui change constamment de signe.  $(U_n)$  est ni croissante, ni décroissante.

3. Méthode 1 : Pour tout  $n, U_{n+1} - U_n = -(U_n)^2$  qui reste forcément négatif.  $(U_n)$  est décroissante.

4. Méthode 3 :  $U_n = f(n)$  avec  $f$  définie sur  $[0; +\infty[$  par  $f(x) = x^3$ . Pour tout  $x \geq 0, f'(x) = 3x^2 \geq 0$ .  $f$  est croissante sur  $[0; +\infty[$ , donc  $(U_n)$  est croissante.

### ► Exercice n°13

1.  $U_2 = U_0 + 2r = 12, U_{13} = U_0 + 13r = 67$ .

2.  $U_n = U_0 + nr = 2 + 5n$ .

3.  $(U_n)$  est croissante car  $r > 0$ .

► **Exercice n°14**

$$U_7 = U_4 + 3r = 34, U_0 = U_4 - 4r = 13.$$

► **Exercice n°15**

$$U_{11} = U_4 + 7r \Leftrightarrow 19 = 5 + 7r \Leftrightarrow 14 = 7r \Leftrightarrow r = 2.$$

$$U_0 = U_4 - 4r = -3.$$

► **Exercice n°16**

$$\begin{cases} U_2 + U_3 + U_4 = 15 \\ U_6 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} U_0 + 2r + U_0 + 3r + U_0 + 4r = 15 \\ U_0 + 6r = 20 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} 3U_0 + 9r = 15 \\ U_0 + 6r = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} 2L_1 - 3L_2 \\ L_1 - 3L_2 \end{matrix} \begin{cases} 3U_0 = -30 \\ -9r = -45 \end{cases}$$

On en déduit que  $U_0 = -10$  et  $r = 5$ .

► **Exercice n°17**

- Pour tout  $n$ ,  $U_{n+1} - U_n = 2(n+1) - 3 - 2n + 3 = 2 = \text{constante}$ . Donc  $(U_n)$  est arithmétique de raison  $r = 2$ .
- Pour tout  $n$ ,  $U_{n+1} - U_n = (n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$  qui n'est pas constant.  $(U_n)$  n'est pas arithmétique.  
On peut aussi montrer que  $U_2 - U_1 \neq U_1 - U_0$ .

► **Exercice n°18**

- $\frac{3}{100} \times 8000 = 240$
- $(U_n)$  est arithmétique de raison  $r = 240$ .
- $U_n = U_0 + nr = 8000 + 240n$ .
- $U_{15} = 8000 + 240 \times 15 = 11600$

► **Exercice n°19**

$$U_0 + U_1 + \dots + U_{10} = 11 \times \frac{U_0 + U_{10}}{2} = 11 \times \frac{1 + 21}{2} = 121 \text{ car } U_{10} = U_0 + 10r = 21.$$

$$U_{20} + U_{21} + \dots + U_{43} = 24 \times \frac{U_{20} + U_{43}}{2} = 24 \times \frac{41 + 87}{2} = 1536 \text{ car } U_{20} = U_0 + 20r = 41 \text{ et } U_{43} = U_0 + 43r = 87.$$

► **Exercice n°20**

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = 276 \Leftrightarrow \frac{n(n+1)}{2} = 276 \Leftrightarrow n^2 + n - 552 = 0.$$

$$\Delta = 2209, n_1 = \frac{-1 - 47}{2} = -24, n_2 = \frac{-1 + 47}{2} = 23.$$

Il faut  $n = 23$ .

► **Exercice n°21**

- $U_2 = q^2 \times U_0 = 45; U_5 = q^5 \times U_0 = 1215$ .
- $U_n = q^n \times U_0 = 3^n \times 5$ .
- $U_0 > 0$  et  $q > 1$  donc  $(U_n)$  est croissante.

► **Exercice n°22**

- $U_3 = q^2 \times U_0 = 4; U_6 = q^6 \times U_0 = \frac{1}{2}$ .
- $U_n = q^n \times U_0 = (\frac{1}{2})^2 \times 32$
- $U_0 > 0$  et  $0 < q < 1$  donc  $(U_n)$  est décroissante.

► **Exercice n°23**

$$U_4 = q^4 \times U_0 \Leftrightarrow 81 = 3^4 \times U_0 \Leftrightarrow U_0 = 1$$

$$U_7 = q^3 \times U_4 = 2187.$$

► **Exercice n°24**

$$2U_2 = 3U_1 - U_0 \Leftrightarrow 2q^2U_0 = 3qU_0 - U_0 \Leftrightarrow 2q^2U_0 - 3qU_0 + U_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow U_0(2q^2 - 3q + 1) = 0 \Leftrightarrow 2q^2 - 3q + 1 \text{ car } U_0 \neq 0.$$

$$\Delta = 1, q_1 = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2}, q_2 = \frac{3+1}{4} = 1. \text{ Il faut } q = \frac{1}{2} \text{ ou } q = 1.$$

► **Exercice n°25**

- Pour tout  $n$ ,  $U_n \neq 0$  et  $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{-4 \times 5^{n+1}}{-4 \times 5^n} = 5 = \text{constante}$ . Donc  $(U_n)$  est géométrique de raison 5.
- Pour tout  $n$ ,  $U_n \neq 0$  et  $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\frac{1}{2(n+1)+1}}{\frac{1}{2n+1}} = \frac{2n+1}{2n+3}$  qui n'est pas constant.  
 $(U_n)$  n'est pas géométrique.  
On peut aussi montrer que  $\frac{U_2}{U_1} \neq \frac{U_1}{U_0}$ .

► **Exercice n°26**

- Diminuer de 20% revient à multiplier par  $1 - \frac{20}{100} = 0,8$ .  $(I_n)$  est géométrique de raison  $q = 0,8$ .
- $I_n = q^n \times U_0 = 0,8^n \times 50$ .
- $I_4 = 0,8^4 \times 50 = 20,48$

4.

```
n=0
I=50
while I>1 :
    I=0.8*I
    n=n+1
print(n)
```

► **Exercice n°27**

- capital d'une année=capital de l'année précédente+intérêts.  
On a donc  $U_{n+1} = U_n + \frac{3}{100} \times U_n = \left(1 + \frac{3}{100}\right) U_n = 1,03U_n$
- $(U_n)$  est géométrique de raison  $q = 1,03$ .
- $U_n = q^n \times U_0 = 1,03^n \times 8000$ .
- $U_8 = 1,03^8 \times 8000 = 10134,2$

► **Exercice n°28**

- On passe d'un terme au terme suivant en multipliant toujours par 0,5.  $(U_n)$  est une suite géométrique de raison  $q = 0,5$ .
- a)  $U_n = q^n \times U_0 = 0,5^n \times 5$ .  
b) 10500 ans correspond à 7 périodes de désintégration et  $U_7 = 0,5^7 \times 5 \approx 0,04$

► **Exercice n°29**

$$U_0 + U_1 + \dots + U_{12} = U_0 \times \frac{1 - 2^{13}}{1 - 2} = 8191$$

$$U_2 + U_3 + \dots + U_{15} = U_2 \times \frac{1 - 2^{14}}{1 - 2} = 4(2^{14} - 1) = 65532.$$

► **Exercice n°30**

- On passe d'un terme au terme suivant en ajoutant toujours 450. Donc  $(U_n)$  est arithmétique de raison 450 et pour tout  $n$ , et  $U_n = U_0 + 450n = 20000 + 450n$ .
- On passe d'un terme au terme suivant en multipliant toujours par  $\left(1 + \frac{2}{100}\right) = 1,02$ , donc  $(V_n)$  est géométrique de raison 1,02 et pour tout  $n$ ,  $V_n = q^n \times V_0 = 19900 \times 1,02^n$ .
- 

```
for n in range(20):
    U=20000+450*n
    V=19900*1.02**n
    if U>V:
        print("Pour n=",n," la proposition 1 est la meilleure")
    else:
        print("Pour n=",n," la proposition 2 est la meilleure")
```

► **Exercice n°31**

- $U_{n+1} = 0,9U_n + 2$ ;  $U_0 = 25$ .
- $U_1 = 0,9U_0 + 2 = 24,5$ ;  $U_2 = 0,9U_1 + 2 = 24,05$ .
- a)  $V_0 = U_0 - 20 = 5$ ;  $V_1 = U_1 - 20 = 4,5$ ;  $V_2 = U_2 - 20 = 4,05$ .  
b) Pour tout  $n$ ,  $V_n \neq 0$  et  $\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{U_{n+1} - 20}{U_n - 20} = \frac{0,9U_n + 2 - 20}{U_n - 20} = \frac{0,9U_n - 18}{U_n - 20} = \frac{0,9(U_n - 20)}{U_n - 20} = 0,9$ . Donc  $(V_n)$  est géométrique de raison  $q = 0,9$ .  
c)  $V_n = q^n \times V_0 = 0,9^n \times 5$ .  
 $V_n = U_n - 20$  donc  $U_n = V_n + 20 = 0,9^n \times 5 + 20$ .
- $U_{10} = 0,9^{10} \times 5 + 20 \approx 21,743$ .
- $V_0 + V_1 + \dots + V_9 = V_0 \times \frac{1 - 0,9^{10}}{1 - 0,9} \approx 32,57$ .  
 $U_0 + U_1 + \dots + U_9 = V_0 + 20 + V_1 + 20 + \dots + V_9 + 20 = V_0 + V_1 + \dots + V_9 + 10 \times 20 \approx 232,57$

► **Exercice n°32**

- Diminuer de 2% revient à multiplier par 0,98 et on ajoute les 5 litres d'eau.
- a) Pour tout  $n$ ,  $V_n \neq 0$  et  $\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{U_{n+1} - 250}{U_n - 250} = \frac{0,98U_n + 5 - 250}{U_n - 250} = \frac{0,98U_n - 245}{U_n - 250} = \frac{0,98(U_n - 250)}{U_n - 250} = 0,98$ . Donc  $(V_n)$  est géométrique de raison  $q = 0,98$  et de premier terme  $V_0 = U_0 - 250 = 30$ .  
b)  $V_n = q^n \times V_0 = 0,98^n \times 30$ .  
 $V_n = U_n - 250$  donc  $U_n = V_n + 250 = 0,98^n \times 30 + 250$ .
- Pour tout  $n$ ,  $0,98^n \times 30 > 0$  et donc  $U_n > 250$ . La préconisation est respectée.

► **Exercice n°33**

1. Pour tout  $n$ ,  $V_n \neq 0$  et  $\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{U_{n+1} - 100A}{U_n - 100A} = \frac{1,01U_n - A - 100A}{U_n - 100A}$   
 $= \frac{1,01U_n - 101A}{U_n - 100A} = \frac{1,01(U_n - 100A)}{U_n - 100A} = 1,01$ . Donc  $(V_n)$  est géométrique de  
raison  $q = 1,01$  et de premier terme  $V_0 = U_0 - 100A = 120\,000 - 100A$ .
2.  $V_n = q^n \times V_0 = 1,01^n \times [120\,000 - 100A]$ .  
 $U_n = V_n + 100A = 1,01^n \times [120\,000 - 100A] + 100A$
3.  $U_{15} = 0 \Leftrightarrow 1,01^{15} \times [120\,000 - 100A] + 100A = 0$ .  
 $\Leftrightarrow 1,01^{15} \times 120\,000 - 1,01^{15} \times 100A + 100A = 0$   
 $\Leftrightarrow 1,01^{15} \times 120\,000 = 100A(1,01^{15} - 1) \Leftrightarrow A = \frac{1,01^{15} \times 120\,000}{100(1,01^{15} - 1)} \approx 8654,85$   
Mensualités  $\approx \frac{8654,85}{12} \approx 721,24$ .

► **Exercice n°34**

[0, 1, 1]  
[0, 1, 1, 2]  
[0, 1, 1, 2, 3]  
[0, 1, 1, 2, 3, 5]  
[0, 1, 1, 2, 3, 5, 8]  
[0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13]  
[0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21]  
[0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34]  
[0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55]