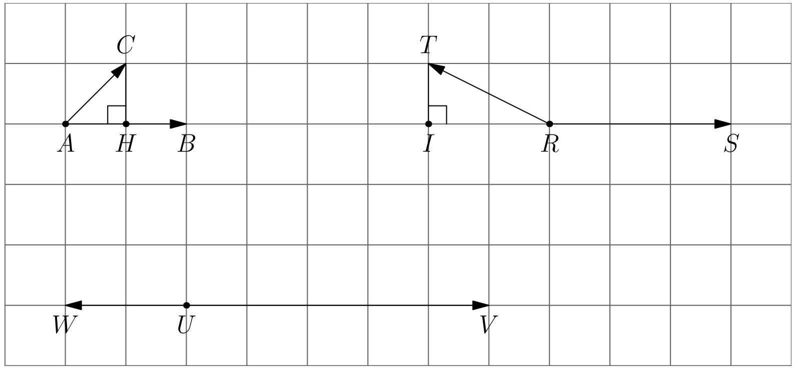
Complément sur le produit scalaire

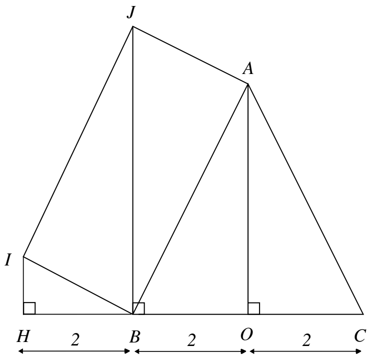
En rouge figure le projeté orthogonal du vecteur correspondant sur la droite portant l'autre vecteur.

▶ Exercice n°1



1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = AB \times AH = 2 \times 1 = 2$
2. $\overrightarrow{RS} \cdot \overrightarrow{RT} = \overrightarrow{RS} \cdot \overrightarrow{RI} = -RS \times RI = -3 \times 2 = -6$
3. $\overrightarrow{UV} \cdot \overrightarrow{UW} = -UV \times UW = -5 \times 2 = -10$

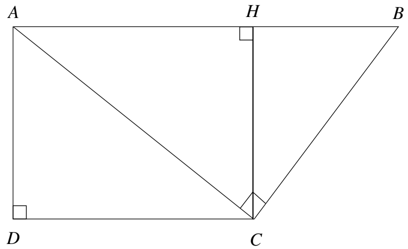
▶ Exercice n°2



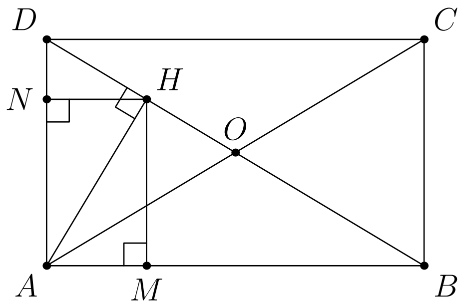
1. $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BO} = BC \times BO = 4 \times 2 = 8$
2. $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{JC} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} = BC \times BC = 4 \times 4 = 16$
3. $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{OB} = -BC \times OB = -4 \times 2 = -8$
4. $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{HO} = BC \times HO = 4 \times 4 = 16$
5. $\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BH} = -BO \times BH = -2 \times 2 = -4$
6. $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CI} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CH} = -BC \times CH = -4 \times 6 = -24$

▶ Exercice n°3

En projetant $\overrightarrow{AB}$ sur (AC), $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = AC \times AC = AC^2$.
En projetant $\overrightarrow{AC}$ sur (AB), $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = AB \times AH = AB \times CD$ car $AH = CD$.
On en déduit bien que $AC^2 = AB \times CD$.



▶ Exercice n°4



1. $\overrightarrow{NM}$ et $\overrightarrow{AH}$ se projettent orthogonalement sur (AB) en $\overrightarrow{AM}$, donc on a :
   $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM}$.
   On en déduit que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$.
2. $\overrightarrow{NM}$ et $\overrightarrow{HA}$ se projettent orthogonalement sur (AD) en $\overrightarrow{NA}$, donc on a :
   $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{NA}$ et $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{HA} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{NA}$.
   On en déduit que $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{HA}$.
3. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{HA} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AH} = \left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\right) \cdot \overrightarrow{AH} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA}\right) \cdot \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{AH} = 0$ car $(DB) \perp (AH)$.
4. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{NM} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) \cdot \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{NM} = 0$.
   On en déduit que (AC) et (NM) sont perpendiculaires.

▶ Exercice n°5

1. $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u},\vec{v}) = 4 \times 7 \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 14\sqrt{2}$
2. $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u},\vec{v}) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$
3. $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u},\vec{v}) = 4 \times \dfrac{3}{2} \times \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -3\sqrt{2}$

▶ Exercice n°6

$\cos(\vec{u},\vec{v}) = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} = \dfrac{3}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Les mesures principales possibles de $(\vec{u},\vec{v})$ sont donc $\dfrac{\pi}{6}$ et $-\dfrac{\pi}{6}$.

▶ Exercice n°7

$\cos(\vec{u},\vec{v}) = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} = \dfrac{\sqrt{3}\times(-3)+1\times\sqrt{3}}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}\times\sqrt{(-3)^2+(\sqrt{3})^2}} = \dfrac{-2\sqrt{3}}{2\times 2\sqrt{3}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Les mesures principales possibles de $(\vec{u},\vec{v})$ sont donc $\dfrac{5\pi}{6}$ et $-\dfrac{5\pi}{6}$.

▶ Exercice n°8

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$

et $\cos\widehat{BAC} = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB\times AC} = \dfrac{2\times(-1)+0\times(-1)}{\sqrt{2^2+0^2}\times\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}} = \dfrac{-2}{2\times\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

On peut en déduire qu'une mesure de l'angle géométrique $\widehat{BAC}$ est $\frac{3\pi}{4}$.

▶ Exercice n°9

1. $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AJ}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$
2. $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AJ} = 2\times 1 + 1\times 2 = 4$.
   $\cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AJ}}{AI\times AJ} = \dfrac{4}{\sqrt{2^2+1^2}\times\sqrt{1^2+2^2}} = \dfrac{4}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}} = \dfrac{4}{5}$

▶ Exercice n°10

$BC^2 = 8^2+5^2-2\times 8\times 5\times\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 64+25-80\times\frac{1}{2} = 49$.

▶ Exercice n°11

1. On a $\sin\widehat{A} = \dfrac{CH}{b}$, donc $CH = b\sin\widehat{A}$.
   Dès lors, $S = \dfrac{AB\times CH}{2} = \dfrac{1}{2}bc\sin\widehat{A}$.
2. D'après la question précédente, $2S = bc\sin\widehat{A}$. On en déduit que $\sin\widehat{A} = \dfrac{2S}{bc}$ et que $\dfrac{a}{\sin\widehat{A}} = \dfrac{a}{\frac{2S}{bc}} = \dfrac{abc}{2S}$.
   De même, on montrerait que $\dfrac{b}{\sin\widehat{B}} = \dfrac{abc}{2S}$ et que $\dfrac{c}{\sin\widehat{C}} = \dfrac{abc}{2S}$.
   On a donc bien $\dfrac{a}{\sin\widehat{A}} = \dfrac{b}{\sin\widehat{B}} = \dfrac{c}{\sin\widehat{C}}$.
3. On doit avoir $\dfrac{a}{\sin\widehat{A}} = \dfrac{b}{\sin\widehat{B}} \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{1}{\sin\widehat{B}} \Leftrightarrow \sin\widehat{B} = \dfrac{1}{2}$.
   On peut en déduire que $\widehat{B} = \dfrac{\pi}{6}$ et $\widehat{C} = \pi - \widehat{A} - \widehat{B} = \pi - \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{2}$
   (le triangle est en fait rectangle en C)
4. a) Dans ACB, $\widehat{C} = 180° - 38° - 36° - 43° = 63°$ et $\dfrac{AC}{\sin 38°} = \dfrac{172}{\sin 63°}$.
   $\Rightarrow AC = \dfrac{172\times\sin 38°}{\sin 63°} \approx 118{,}8$.
   b) Dans ADB, $\widehat{D} = 180° - 43° - 38° - 35° = 64°$ et $\dfrac{AD}{\sin 73°} = \dfrac{172}{\sin 64°}$.
   $\Rightarrow AD = \dfrac{172\times\sin 73°}{\sin 64°} \approx 183$.
   c) D'après Théorème d'Al-Kashi dans le triangle ACD,
   $CD^2 = AC^2 + AD^2 - 2\times AC\times AD\times\cos 36° \approx 12425{,}7$. On en déduit que $CD \approx 111{,}5$

▶ Exercice n°12

Elle est suffisante mais pas nécessaire.

Il suffit en effet que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ soient colinéaires et de sens contraire pour que $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} \leqslant 0$ car dans ce cas le produit scalaire est égal à $-\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$.

Par contre, on peut avoir $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} \leqslant 0$ sans que les vecteurs soient colinéaires et de sens contraire : voir, par exemple, le deuxième cas de l'exercice 1.