Variations d'une fonction : exercices

Les réponses (non détaillées) aux questions sont disponibles à la fin du document

Exercice 1 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 6x + 5$.

1) Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

2) Déterminer les coordonnées des points d'intersection entre la courbe représentative de f et la droite D d'équation $y = \frac{1}{2}x - 2$.

Exercice 2 :

Etudier les variations sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par $f(x) = 3x - 4x^3$.

Exercice 3 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{-4x-4}{x^2+2x+5}$.

1) Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

2) Déterminer les coordonnées du point A, intersection entre la courbe représentative de f et l'axe des abscisses.

3) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe représentative de f au point A.

Exercice 4 :

Etudier les variations sur $]-2;1[$ de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{-5x^2+4x-8}{x^2+x-2}$.

Réponses exercice 1 :

1) $f'(x) = 2x + 6$

$(2x+6)$ s'annule pour $x = -3$. "signe de $a = 2$ après le 0".

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	-4	$\nearrow$	

2) On résoud l'équation $f(x) = \frac{1}{2}x - 2$. Après calcul, on obtient $x = -\frac{7}{2}$ ou $x = -2$.

De plus, si $x = -\frac{7}{2}$ alors $\frac{1}{2}x - 2 = -\frac{15}{4}$ et si $x = -2$ alors $\frac{1}{2}x - 2 = -3$.

Finalement, il y a 2 points d'intersection : $A\left(-\frac{7}{2}, -\frac{15}{4}\right)$ et $B(-2;-3)$.

Réponses exercice 2 :

$f'(x) = 3 - 12x^2 = 3(1-4x^2) = 3(1-2x)(1+2x)$

$(1-2x)$ s'annule pour $x = \frac{1}{2}$. "signe de $a = -2$ après le 0.

$(1+2x)$ s'annule pour $x = -\frac{1}{2}$. "signe de $a = 2$ après le 0".

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$1-2x$		$+$		$+$	0	$-$	
$1+2x$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	

Réponses exercice 3 :

1) Après calcul, on a $f'(x) = \dfrac{4\left(x^2+2x-3\right)}{\left(x^2+2x+5\right)^2}$

Signe de x^2+2x-3 : $\Delta = 16 > 0$. Racines : -3 et 1 ."signe de $a = 1$ à l'extérieur des racines".

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
x^2+2x-3		$+$	0	$-$	0	$+$	
$(x^2+2x+5)^2$		$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	

2) On résoud l'équation $f(x) = 0$. On obtient $x = -1$. Donc le point d'intersection est $A(-1;0)$.

3) $T : y = f(-1) + f'(-1)(x+1)$. $f(-1) = 0$ et $f'(-1) = -1$.
Finalement, $T : y = -x-1$.

Réponses exercice 4 :

Après calcul, on a $f'(x) = \dfrac{-9x^2+36x}{\left(x^2+x-2\right)^2} = \dfrac{9x(4-x)}{\left(x^2+x-2\right)^2}$.
$9x$ s'annule pour $x = 0$ et est évidemment positif après.
$(4-x)$ s'annule pour $x = 4$. "signe de $a = -1$ après le 0".
Or l'intervalle d'étude $]-2;1[$ se situe avant 4. $(4-x)$ est donc positif sur $]-2;1[$.

x	-2		0		1
$9x$		$-$	0	$+$	
$4-x$		$+$		$+$	
$(x^2+x-2)^2$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	4	$\nearrow$	