Complément sur les suites - L'essentiel du cours

a) Limites de suite

• Les théorèmes sur les opérations avec les limites de fonction restent valables pour les suites.
• Pour les suites définies par $U_n = f(n)$: si f admet une limite en $+\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
• si pour tout $n \geqslant n_0$, $V_n \leqslant U_n \leqslant W_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \lim\limits_{n\to+\infty} W_n = l$ (l réel) alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l$.

b) Limite de q^n avec $q > 0$

• si $0 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.
• si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.

► *Exemples :*
• $\lim\limits_{n\to+\infty} (1,15)^n = +\infty$ car $1,15 > 1$.
• $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-3\times\left(\frac{1}{2}\right)^n = 1$ car $0 < \frac{1}{2} < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 3\times\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$.

c) Suites arithmétiques

On passe d'un terme au terme suivant en ajoutant toujours le même nombre r appelé raison de la suite.
• Pour tout n : $U_{n+1} = U_n + r$; $U_n = U_0 + nr$; $U_n = U_p + (n-p)r$
• Si pour tout n, $U_{n+1} - U_n =$ constante alors (U_n) est une suite arithmétique de raison égale à la constante.
• $U_p + U_{p+1} + \cdots + U_n = (n-p+1) \times \dfrac{U_p + U_n}{2} = (\text{nb de termes}) \times \dfrac{\text{1er terme} + \text{dernier}}{2}$
• Si la raison r est positive, la suite est croissante.
• Si la raison r est négative, la suite est décroissante.

► *Exemple :*
Soit (U_n) la suite arithmétique de 1er terme $U_0 = 2$ et de raison $r = 3$.
$U_{10} = U_0 + 10r = 2 + 10 \times 3 = 32$; $U_{33} = U_0 + 33r = 2 + 33 \times 3 = 101$
Pour tout n, $U_n = U_0 + nr = 2 + 3n$. $U_0 + U_1 + \cdots + U_{10} = 11 \times \dfrac{2+32}{2} = 187$.
La suite est strictement croissante car $r > 0$.

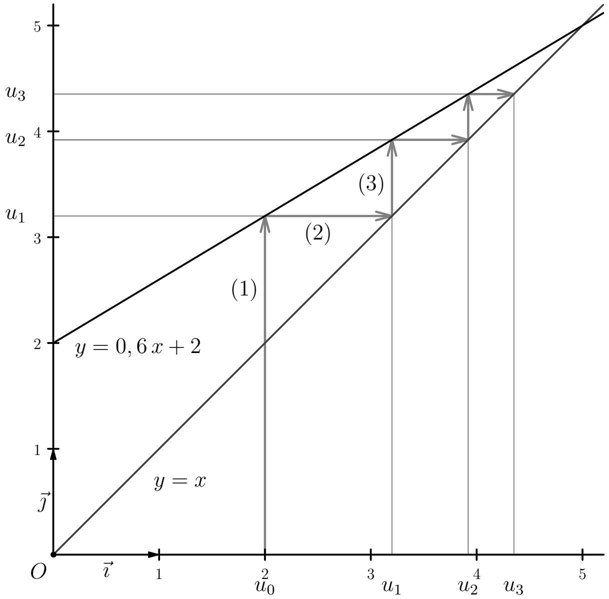
d) Suites géométriques

On passe d'un terme au terme suivant en multipliant toujours par le même nombre q appelé raison de la suite.
• Pour tout n : $U_{n+1} = q \times U_n$; $U_n = q^n \times U_0$; $U_n = q^{n-p} \times U_p$
• Si pour tout n, $U_n \neq 0$ et $\frac{U_{n+1}}{U_n} =$ constante alors (U_n) est une suite géométrique de raison égale à la constante.
• $U_p + U_{p+1} + \cdots + U_n = U_p \times \dfrac{1-q^{n-p+1}}{1-q} = \text{1er terme} \times \dfrac{1-q^{\text{nb de termes}}}{1-q}$ (pour $q \neq 1$)
• Si le premier terme est positif et si $q > 1$ alors la suite géométrique de raison q est croissante.
• Si le premier terme est positif et si $0 < q < 1$ alors la suite géométrique de raison q est décroissante.

► *Exemple :*
Soit (U_n) la suite géométrique de 1er terme $U_0 = 5$ et de raison $q = 2$.
$U_4 = q^4 \times U_0 = 2^4 \times 5 = 80$; $U_{10} = q^{10} \times U_0 = 2^{10} \times 5 = 5120$
Pour tout n, $U_n = q^n \times U_0 = 5 \times 2^n$. $U_0 + U_1 + \cdots + U_8 = 5 \times \dfrac{1-2^9}{1-2} = 2555$.
La suite (U_n) est croissante car $U_0 > 0$ et $q > 1$.

e) Suites arithmético-géométriques : $U_{n+1} = aU_n + b$

► *Exemple :* Soit (U_n), la suite définie par $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = 0,6\,U_n + 2$.
a) Représenter graphiquement les premiers termes de la suite.
On trace d'abord la droite D d'équation $y = 0,6\,x + 2$ et la droite d'équation $y = x$.
On part de U_0 en abscisse : l'ordonnée du point de la droite D correspondant à cette abscisse nous donne U_1 [(1) *sur le graphique*] .
Pour déterminer $U_2 = f(U_1)$, il nous faut rabattre U_1 sur l'axe des abscisses [(2) *sur le graphique*] en utilisant la droite d'équation $y = x$.
Dès lors, U_2 est l'ordonnée du point de la droite D d'abscisse U_1 [(3) *sur le graphique*].
Pour poursuivre la construction, on répète le procédé en rabattant U_2 sur l'axe des abscisses...



b) Montrer que la suite (V_n) définie par $V_n = U_n - 5$ est géométrique.

Méthode générale :

- on calcule $\dfrac{V_{n+1}}{V_n}$ en exprimant V_n et V_{n+1} en fonction de U_n et de U_{n+1} : $\dfrac{V_{n+1}}{V_n} = \dfrac{U_{n+1} - 5}{U_n - 5}$
- on remplace alors U_{n+1} par ce qu'indique la définition de la suite (U_n) : $\dfrac{V_{n+1}}{V_n} = \dfrac{U_{n+1} - 5}{U_n - 5} = \dfrac{0,6\,U_n + 2 - 5}{U_n - 5}$
- on simplifie le numérateur et on le factorise par le coefficient devant U_n : $\dfrac{V_{n+1}}{V_n} = \dfrac{U_{n+1} - 5}{U_n - 5} = \dfrac{0,6\,U_n + 2 - 5}{U_n - 5} = \dfrac{0,6\,U_n - 3}{U_n - 5} = \dfrac{0,6\left(U_n - \frac{3}{0,6}\right)}{U_n - 5}$ $= \dfrac{0,6\,(U_n - 5)}{U_n - 5} = 0,6$

Pour tout n, on a $\dfrac{V_{n+1}}{V_n} = 0,6$. Cela prouve bien que (V_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,6$ et de premier terme $V_0 = U_0 - 5 = 2 - 5 = -3$.

c) En déduire l'expression de V_n, puis de U_n en fonction de n.

Pour tout n, $V_n = q^n \times V_0 = -3\,(0,6)^n$.

$V_n = U_n - 5 \Leftrightarrow U_n = V_n + 5 = -3\,(0,6)^n + 5$

d) Déterminer la limite de la suite (U_n).

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} -3\underbrace{(0,6)^n}_{\to 0} + 5 = 5$ ($\lim\limits_{n\to+\infty} (0,6)^n = 0$ car $0 < 0,6 < 1$).

e) Étudier le sens de variation de la suite (U_n).

Pour tout n, $U_{n+1} - U_n = -3\,(0,6)^{n+1} + 5 - [-3\,(0,6)^n + 5] = -3\,(0,6)^{n+1} + 3\,(0,6)^n$ $= 3\,(0,6)^n \times [-0,6 + 1] = 3\,(0,6)^n \times 0,4 = 1,2\,(0,6)^n$.

Le résultat étant positif pour tout n, on en déduit que (U_n) est croissante.

f) Déterminer le plus petit entier n tel que $U_n > 4,997$.

$U_n > 4,997 \Leftrightarrow -3\,(0,6)^n + 5 > 4,997 \Leftrightarrow -3\,(0,6)^n > -0,003 \Leftrightarrow 0,6^n < 0,001$ $\Leftrightarrow \ln(0,6^n) < \ln(0,001) \Leftrightarrow n\ln(0,6) < \ln(0,001) \Leftrightarrow n > \dfrac{\ln(0,001)}{\ln(0,6)}$ (car $\ln(0,6) < 0$).

Or, $\dfrac{\ln(0,001)}{\ln(0,6)} \approx 13,5$. Le plus petit entier qui convient est donc 14.

g) Calculer $V_0 + V_1 + \cdots + V_9$ et en déduire $U_0 + U_1 + \cdots + U_9$.

(V_n) est géométrique.

Donc, $V_0 + V_1 + \cdots + V_9 = V_0 \times \dfrac{1 - (0,6)^{10}}{1 - 0,6} = -3 \times \dfrac{1 - (0,6)^{10}}{0,4} \approx -7,45$.

Pour tout n, $U_n = V_n + 5$. Donc, $U_0 + U_1 + \cdots + U_9 = V_0 + 5 + V_1 + 5 + \cdots + V_9 + 5$ $= V_0 + V_1 + \cdots + V_9 + 50 \approx 42,55$.

h) Déterminer l'expression de $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$ en fonction de n.

$S_n = V_0 + 5 + V_1 + 5 + \cdots + V_n + 5 = V_0 + V_1 + \cdots + V_n + 5(n+1)$.

Or (V_n) est géométrique.

Donc, $V_0 + V_1 + \cdots + V_n = V_0 \times \dfrac{1 - (0,6)^{n+1}}{1 - 0,6} = -3 \times \dfrac{1 - (0,6)^{n+1}}{0,4}$

$= -7,5 \times \left(1 - (0,6)^{n+1}\right)$.

D'où, $S_n = -7,5 \times \left(1 - (0,6)^{n+1}\right) + 5(n+1)$.