

## Complément sur les suites - L'essentiel du cours

### a) Limites de suite

- Les théorèmes sur les opérations avec les limites de fonction restent valables pour les suites.
- Pour les suites définies par  $U_n = f(n)$  : si  $f$  admet une limite en  $+\infty$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
- si pour tout  $n \geq n_0$ ,  $V_n \leq U_n \leq W_n$  et si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = l$  ( $l$  réel) alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l$ .

### b) Limite de $q^n$ avec $q > 0$

- si  $0 < q < 1$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$ .
- si  $q > 1$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$ .

► *Exemples :*

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1, 15)^n = +\infty$  car  $1, 15 > 1$ .
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1$  car  $0 < \frac{1}{2} < 1$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ .

### c) Suites arithmétiques

- On passe d'un terme au terme suivant en ajoutant toujours le même nombre  $r$  appelé raison de la suite.
- Pour tout  $n$  :  $U_{n+1} = U_n + r$  ;  $U_n = U_0 + nr$  ;  $U_n = U_p + (n - p)r$
  - Si pour tout  $n$ ,  $U_{n+1} - U_n = \text{constante}$  alors  $(U_n)$  est une suite arithmétique de raison égale à la constante.
  - $U_p + U_{p+1} + \dots + U_n = (n - p + 1) \times \frac{U_p + U_n}{2} = (\text{nb de termes}) \times \frac{\text{1er terme} + \text{dernier}}{2}$
  - Si la raison  $r$  est positive, la suite est croissante.
  - Si la raison  $r$  est négative, la suite est décroissante.

► *Exemple :*

Soit  $(U_n)$  la suite arithmétique de 1er terme  $U_0 = 2$  et de raison  $r = 3$ .

$U_{10} = U_0 + 10r = 2 + 10 \times 3 = 32$  ;  $U_{33} = U_0 + 33r = 2 + 33 \times 3 = 101$   
 Pour tout  $n$ ,  $U_n = U_0 + nr = 2 + 3n$  .  $U_0 + U_1 + \dots + U_{10} = 11 \times \frac{2 + 32}{2} = 187$ .  
 La suite est strictement croissante car  $r > 0$  .

### d) Suites géométriques

- On passe d'un terme au terme suivant en multipliant toujours par le même nombre  $q$  appelé raison de la suite.
- Pour tout  $n$  :  $U_{n+1} = q \times U_n$  ;  $U_n = q^n \times U_0$  ;  $U_n = q^{n-p} \times U_p$
  - Si pour tout  $n$ ,  $U_n \neq 0$  et  $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \text{constante}$  alors  $(U_n)$  est une suite géométrique de raison égale à la constante.
  - $U_p + U_{p+1} + \dots + U_n = U_p \times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q} = \text{1er terme} \times \frac{1 - q^{\text{nb de termes}}}{1 - q}$  (pour  $q \neq 1$ )
  - Si le premier terme est positif et si  $q > 1$  alors la suite géométrique de raison  $q$  est croissante.
  - Si le premier terme est positif et si  $0 < q < 1$  alors la suite géométrique de raison  $q$  est décroissante.

► *Exemple :*

Soit  $(U_n)$  la suite géométrique de 1er terme  $U_0 = 5$  et de raison  $q = 2$ .  
 $U_4 = q^4 \times U_0 = 2^4 \times 5 = 80$  ;  $U_{10} = q^{10} \times U_0 = 2^{10} \times 5 = 5120$   
 Pour tout  $n$ ,  $U_n = q^n \times U_0 = 5 \times 2^n$  .  $U_0 + U_1 + \dots + U_8 = 5 \times \frac{1 - 2^9}{1 - 2} = 2555$ .  
 La suite  $(U_n)$  est croissante car  $U_0 > 0$  et  $q > 1$ .

### e) Suites arithmético-géométriques : $U_{n+1} = aU_n + b$

► *Exemple :* Soit  $(U_n)$ , la suite définie par  $U_0 = 2$  et  $U_{n+1} = 0,6U_n + 2$  .

a) *Représenter graphiquement les premiers termes de la suite.*

On trace d'abord la droite  $D$  d'équation  $y = 0,6x + 2$  et la droite d'équation  $y = x$ .

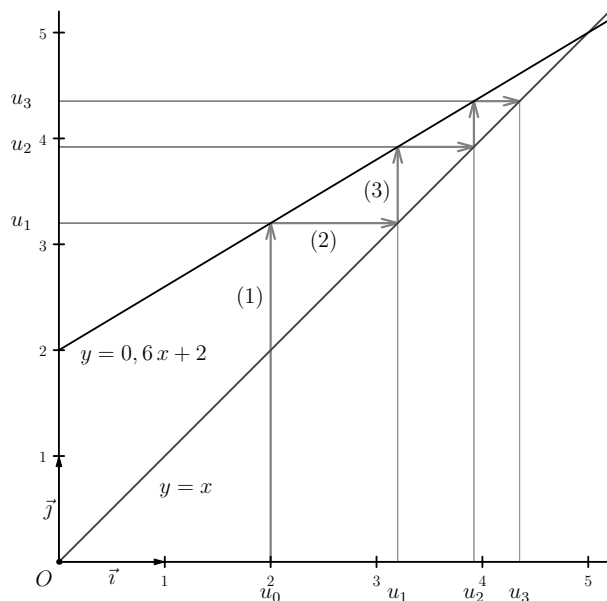
On part de  $U_0$  en abscisse : l'ordonnée du point de la droite  $D$  correspondant à cette abscisse nous donne  $U_1$  [(1) *sur le graphique*] .

Pour déterminer  $U_2 = f(U_1)$ , il nous faut rabattre  $U_1$  sur l'axe des abscisses [(2) *sur le graphique*] en utilisant la droite d'équation  $y = x$  .

© Dès lors,  $U_2$  est l'ordonnée du point de la droite  $D$  d'abscisse  $U_1$  [(3) *sur le graphique*] .

Pour poursuivre la construction, on répète le procédé en rabattant  $U_2$  sur l'axe des abscisses...

Pascal Brachet - www.xmlmath.net - Licence CC BY NC SA - Utilisation commerciale interdite



b) Montrer que la suite  $(V_n)$  définie par  $V_n = U_n - 5$  est géométrique.

**Méthode générale :**

- on calcule  $\frac{V_{n+1}}{V_n}$  en exprimant  $V_n$  et  $V_{n+1}$  en fonction de  $U_n$  et de  $U_{n+1}$  :

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{U_{n+1} - 5}{U_n - 5}$$

- on remplace alors  $U_{n+1}$  par ce qu'indique la définition de la suite  $(U_n)$  :

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{U_{n+1} - 5}{U_n - 5} = \frac{0,6U_n + 2 - 5}{U_n - 5}$$

- on simplifie le numérateur et on le factorise par le coefficient devant  $U_n$  :

$$\begin{aligned} \frac{V_{n+1}}{V_n} &= \frac{U_{n+1} - 5}{U_n - 5} = \frac{0,6U_n + 2 - 5}{U_n - 5} = \frac{0,6U_n - 3}{U_n - 5} = \frac{0,6\left(U_n - \frac{3}{0,6}\right)}{U_n - 5} \\ &= \frac{0,6(U_n - 5)}{U_n - 5} = 0,6 \end{aligned}$$

Pour tout  $n$ , on a  $\frac{V_{n+1}}{V_n} = 0,6$ . Cela prouve bien que  $(V_n)$  est une suite géométrique de raison  $q = 0,6$  et de premier terme  $V_0 = U_0 - 5 = 2 - 5 = -3$ .

c) En déduire l'expression de  $V_n$ , puis de  $U_n$  en fonction de  $n$ .

Pour tout  $n$ ,  $V_n = q^n \times V_0 = -3(0,6)^n$ .

$$V_n = U_n - 5 \Leftrightarrow U_n = V_n + 5 = -3(0,6)^n + 5$$

d) Déterminer la limite de la suite  $(U_n)$ .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{-3(0,6)^n}_{\rightarrow 0} + 5 = 5 \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} (0,6)^n = 0 \text{ car } 0 < 0,6 < 1 \right).$$

e) Étudier le sens de variation de la suite  $(U_n)$ .

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } n, U_{n+1} - U_n &= -3(0,6)^{n+1} + 5 - [-3(0,6)^n + 5] = \\ &= -3(0,6)^{n+1} + 3(0,6)^n \\ &= 3(0,6)^n \times [-0,6 + 1] = 3(0,6)^n \times 0,4 = 1,2(0,6)^n. \end{aligned}$$

Le résultat étant positif pour tout  $n$ , on en déduit que  $(U_n)$  est croissante.

f) Déterminer le plus petit entier  $n$  tel que  $U_n > 4,997$ .

$$\begin{aligned} U_n > 4,997 &\Leftrightarrow -3(0,6)^n + 5 > 4,997 \Leftrightarrow -3(0,6)^n > -0,003 \Leftrightarrow 0,6^n < 0,001 \\ &\Leftrightarrow \ln(0,6^n) < \ln(0,001) \Leftrightarrow n \ln(0,6) < \ln(0,001) \Leftrightarrow n > \frac{\ln(0,001)}{\ln(0,6)} \quad (\text{car} \end{aligned}$$

$\ln(0,6) < 0$ ).

Or,  $\frac{\ln(0,001)}{\ln(0,6)} \approx 13,5$ . Le plus petit entier qui convient est donc 14.

g) Calculer  $V_0 + V_1 + \dots + V_9$  et en déduire  $U_0 + U_1 + \dots + U_9$ .

$(V_n)$  est géométrique.

$$\text{Donc, } V_0 + V_1 + \dots + V_9 = V_0 \times \frac{1 - (0,6)^{10}}{1 - 0,6} = -3 \times \frac{1 - (0,6)^{10}}{0,4} \approx -7,45.$$

Pour tout  $n$ ,  $U_n = V_n + 5$ . Donc,  $U_0 + U_1 + \dots + U_9 = V_0 + 5 + V_1 + 5 + \dots + V_9 + 5 = V_0 + V_1 + \dots + V_9 + 50 \approx 42,55$ .

h) Déterminer l'expression de  $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$  en fonction de  $n$ .

$$S_n = V_0 + 5 + V_1 + 5 + \dots + V_n + 5 = V_0 + V_1 + \dots + V_n + 5(n+1).$$

Or  $(V_n)$  est géométrique.

$$\text{Donc, } V_0 + V_1 + \dots + V_n = V_0 \times \frac{1 - (0,6)^{n+1}}{1 - 0,6} = -3 \times \frac{1 - (0,6)^{n+1}}{0,4}$$

$$= -7,5 \times \left(1 - (0,6)^{n+1}\right).$$

$$\text{D'où, } S_n = -7,5 \times \left(1 - (0,6)^{n+1}\right) + 5(n+1).$$