Primitives et intégration : L'essentiel du cours

1) Primitives d'une fonction sur un intervalle

- F est une primitive de f sur un intervalle I si F est dérivable sur I et si pour tout x de I, $F'(x) = f(x)$.
- Si F_0 est une primitive de f sur intervalle I alors toutes les primitives de f sur I sont de la forme $F(x) = F_0(x) + C$ où C est une constante réelle.
- Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

• **Primitives des fonctions usuelles :** *(F représente une primitive de f)*

$f(x) = a$	$F(x) = ax$
$f(x) = x$	$F(x) = \frac{x^2}{2}$
$f(x) = x^2$	$F(x) = \frac{x^3}{3}$
$f(x) = x^3$	$F(x) = \frac{x^4}{4}$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x}$
$f(x) = \frac{1}{x^3}$	$F(x) = -\frac{1}{2x^2}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln x$
$f(x) = \mathrm{e}^x$	$F(x) = \mathrm{e}^x$
$f(x) = \mathrm{e}^{ax+b}$	$F(x) = \frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax+b}$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$

• **Formules générales :**

forme de f	une primitive de f	exemples
$U'U$	$\frac{U^2}{2}$	$f(x) = \frac{1}{x} \times \ln x \Rightarrow F(x) = \frac{(\ln x)^2}{2}$
$\frac{U'}{U}$ $(U(x) > 0)$	$\ln U$	$f(x) = \frac{3}{(3x+1)} \Rightarrow F(x) = \ln(3x+1)$
$U'\mathrm{e}^U$	e^U	$f(x) = 2x\,\mathrm{e}^{(x^2)} \Rightarrow F(x) = \mathrm{e}^{(x^2)}$

• **Recherche pratique d'une primitive :**

Pour les fonctions usuelles, on utilise directement les formules.
Pour autres fonctions, il faut d'abord identifier la forme qui ressemble le plus à la fonction. Si on a la forme exacte, on utilise directement la formule correspondante. Dans le cas contraire, on écrit la forme exacte qu'il faudrait pour la fonction f et on rectifie en multipliant par le coefficient adéquat.

► *Exemple :* Soit f définie sur $]-2\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{(3x+6)}$.

On pense à la forme $\frac{U'}{U}$ (dont une primitive est $\ln U$) . On écrit que $f(x) = \frac{1}{3} \times \underbrace{\frac{3}{3x+6}}_{\text{forme exacte}}$.

Une primitive de f sur $]-2\,;\,+\infty[$ est donc F définie par $F(x) = \frac{1}{3} \times \ln(3x+6)$.

2) Intégration

Soit f une fonction continue sur un intervalle I :
- Pour tous a et b de I :

$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f sur I.

► *Exemple :*

$$\int_0^{\ln 2} 3\,\mathrm{e}^{3x}\,dx = \left[\mathrm{e}^{3x}\right]_0^{\ln 2} = \mathrm{e}^{3\ln 2} - \mathrm{e}^0 = \mathrm{e}^{\ln(2^3)} - 1 = \mathrm{e}^{\ln(8)} - 1 = 8 - 1 = 7.$$

Propriétés de l'intégrale :

Pour f et g continues sur un intervalle I et pour a, b et c de I :
- $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$.
- $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$ *(Relation de Chasles)*
- $\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$ *(linéarité de l'intégrale)*
- Pour tout réel k, $\int_a^b (kf)(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$ *(linéarité de l'intégrale)*

- Si $a \leqslant b$ et si $f(x) \geqslant 0$ sur $[a,b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$
- Si $a \leqslant b$ et si $f(x) \leqslant 0$ sur $[a,b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leqslant 0$
- Si $a \leqslant b$ et si $f(x) \leqslant g(x)$ sur $[a,b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$

Calculs d'aires

f et g sont deux fonctions continues sur $[a,b]$.

- Si pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \leqslant g(x)$ alors l'aire de la partie du plan comprise entre les courbes de f et g et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est égale à $\displaystyle\int_a^b g(x) - f(x)\,dx$ en **unités d'aire**.

(« intégrale de la plus grande moins la plus petite »)

- Si pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \geqslant 0$ alors l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est égale à $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ en **unités d'aire**.
- Si pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \leqslant 0$ alors l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est égale à $\displaystyle -\int_a^b f(x)\,dx$ en **unités d'aire**.

► *Remarques :*

- Pour avoir l'aire en cm^2, il faut multiplier le résultat en unités d'aire par :
(la valeur en cm d'une unité sur l'axe des abscisses) $\times$ (la valeur en cm d'une unité sur l'axe des ordonnées).
- Pour déterminer l'aire entre deux courbes, il faut d'abord connaitre leur position relative sur l'intervalle en question afin de savoir quelle est « la plus grande » et « la plus petite ».

Valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle

Si f est continue sur $[a,b]$, la valeur moyenne de f sur $[a,b]$ est égale à $\displaystyle\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$