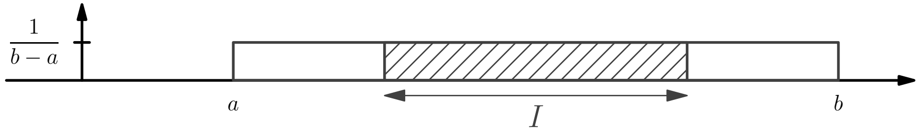
Lois de probabilités continues : L'essentiel du cours

a) Loi uniforme sur $[a\,;\,b]$

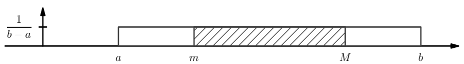
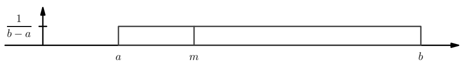
On dit qu'une variable aléatoire X suit la **loi uniforme** sur un intervalle $[a\,;\,b]$ lorsque pour tout intervalle I, inclus dans $[a\,;\,b]$, la probabilité de l'événement « X appartient à I » est égale à l'aire du rectangle de base I et de hauteur $\dfrac{1}{b-a}$.



► **Remarques :**

- On utilise cette loi quand l'expérience aléatoire consiste à choisir au hasard un nombre réel X dans un intervalle $[a\,;\,b]$ (avec donc une infinité de possibilités).
- L'aire du rectangle de hauteur $\dfrac{1}{b-a}$ et allant de a à b en abscisse est égale à 1.
- On doit considérer que la probabilité que X soit égale à un nombre précis dans l'intervalle $[a\,;\,b]$ est nulle, même si c'est contraire à l'intuition, afin d'éviter toute contradiction avec le fait qu'il y ait une infinité de possibilités.

Si une variable aléatoire X suit la **loi uniforme** sur $[a\,;\,b]$ alors pour tous réels m et M inclus dans $[a\,;\,b]$, les probabilités suivantes sont égales à l'aire du rectangle correspondant :

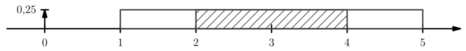
$p\,(m \leqslant X \leqslant M)$	
$p\,(X \leqslant m) = p\,(a \leqslant X \leqslant m)$	
$p\,(X \geqslant M) = p\,(M \leqslant X \leqslant b)$	
$p\,(X = m) = 0$	

(on a les mêmes résultats avec des inégalités strictes)

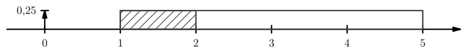
Si une variable aléatoire X suit la **loi uniforme** sur $[a\,;\,b]$ alors :
l'espérance de X est égale à $\dfrac{a+b}{2}$; la **variance** est égale à $\dfrac{(b-a)^2}{12}$.

► *Exemple :* On considère l'expérience aléatoire consistant à choisir un réel X au hasard dans l'intervalle $[1\,;\,5]$ (X suit alors la loi uniforme sur $[1\,;\,5]$)
Le premier réflexe à avoir est de raisonner avec un rectangle allant de 1 à 5 en abscisse et de hauteur égale à $\frac{1}{5-1} = \frac{1}{4} = 0,25$ (afin que son aire totale soit égale à 1). Pour calculer ensuite les probabilités il suffit de regarder l'aire de la zone dans le rectangle qui correspond à l'événement.

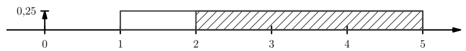
- $p\,(2 \leqslant X \leqslant 4) = 2 \times 0,25 = 0,5$



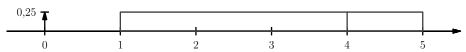
- $p\,(X \leqslant 2) = p\,(1 \leqslant X \leqslant 2) = 1 \times 0,25 = 0,25$



- $p\,(X \geqslant 2) = p\,(2 \leqslant X \leqslant 5) = 3 \times 0,25 = 0,75$



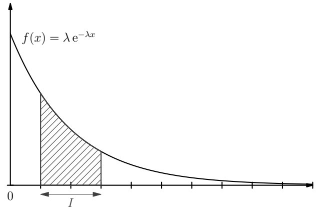
- $p\,(X = 4) = 0$



La valeur moyenne que prend X si l'on répète un grand nombre de fois cette expérience aléatoire est égale à l'espérance de X qui vaut $\dfrac{1+5}{2} = 3$ (ce qui correspond au milieu de l'intervalle).

b) Loi exponentielle

On dit qu'une variable aléatoire X suit la **loi exponentielle de paramètre** λ sur $[0\,;\,+\infty[$ lorsque pour tout intervalle I, inclus dans $[0\,;\,+\infty[$, la probabilité de l'événement « X appartient à I » est égale à l'aire sous la courbe sur I de la fonction f définie par $f(x) = \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}$

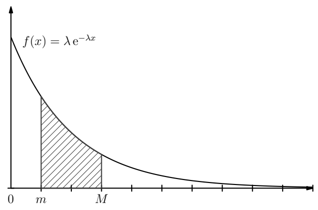


▶ **Remarques :**

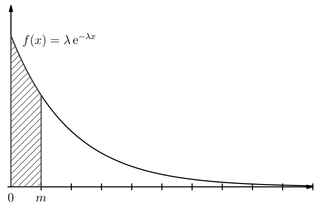
- L'aire totale sous la courbe de 0 à $+\infty$ est égale à 1
- On doit aussi considérer avec la loi exponentielle que la probabilité que X soit égale à un nombre précis est nulle.

Si une variable aléatoire X suit la **loi exponentielle de paramètre** λ sur $[0\,;\,+\infty[$ alors pour tous réels m et M dans $[0\,;\,+\infty[$, on a :

$$\cdot \quad p\,(m \leqslant X \leqslant M) = \int_m^M \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_m^M$$

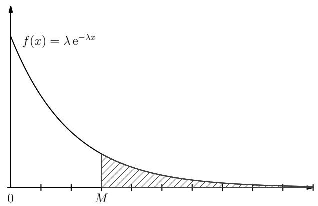


$$\cdot \quad p\,(X \leqslant m) = p\,(0 \leqslant X \leqslant m) = \int_0^m \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^m$$



$$\cdot \quad p\,(X \geqslant M) = 1 - p\,(0 \leqslant X \leqslant M) = 1 - \int_0^M \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = 1 - \left[-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^M$$

(on passe par l'événement contraire car on ne se sait pas calculer directement en terminale une intégrale de borne $+\infty$)



(on a les mêmes résultats avec des inégalités strictes)

Si une variable aléatoire X suit la **loi exponentielle de paramètre** λ sur $[0\,;\,+\infty[$ alors **l'espérance** de X est égale à $\dfrac{1}{\lambda}$.

La loi exponentielle est dite « sans mémoire », parce que pour tous réels positifs M et h : $p_{X \geqslant M}(X \geqslant M + h) = p\,(X \geqslant h)$

▶ *Exemples :*

1. La durée de vie X (en heures) d'un composant électronique suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,0006$ sur $[0\,;\,+\infty[$.

· Calcul de $p\,(X < 100)$:

$p\,(X < 100) = p\,(0 < X < 100) = \displaystyle\int_0^{100} 0,0006\,\mathrm{e}^{-0,0006x}\,\mathrm{d}x$

$= \left[-\mathrm{e}^{-0,0006x}\right]_0^{100} = -\mathrm{e}^{-0,06} + 1 \approx 0,0582$

· Calcul de $p\,(X \geqslant 400)$: $p\,(X \geqslant 400) = 1 - p\,(0 \leqslant X \leqslant 400)$

$= 1 - \displaystyle\int_0^{400} 0,0006\,\mathrm{e}^{-0,0006x}\,\mathrm{d}x = 1 - \left[-\mathrm{e}^{-0,0006x}\right]_0^{400} = 1 - \left(-\mathrm{e}^{-0,24} + 1\right) = \mathrm{e}^{-0,24} \approx 0,7866$

2. Une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ sur $[0\,;\,+\infty[$. Détermination de la valeur de λ sachant que $p\,(X < 70) = 0,05$:

$p\,(X < 70) = 0,05 \Leftrightarrow \displaystyle\int_0^{70} \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = 0,05 \Leftrightarrow \left[-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^{70} = 0,05$

$\Leftrightarrow -\mathrm{e}^{-70\lambda} + 1 = 0,05 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-70\lambda} = 0,95 \Leftrightarrow -70\lambda = \ln(0,95) \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{\ln(0,95)}{-70}$

c) Généralités sur les lois continues à densité

Étant donné f une fonction définie, continue et positive sur un intervalle I telle que : si $I = [a, b]$ alors $\int_a^b f(t)\,dt = 1$ et si $I = [a, +\infty[$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)\,dt = 1$

On dit qu'une variable aléatoire X suit la **loi de probabilité continue de densité** f **sur** I si pour tout intervalle inclus dans I la probabilité que X appartienne à cet intervalle est égale à l'aire « sous la courbe de la densité f » correspondante.

On appelle alors fonction de répartition de X la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = p\,(X \leqslant x)$.

▶ **Remarques :**

La fonction de densité de la loi uniforme sur $[a\,;\,b]$ est définie sur $[a\,;\,b]$ par $f(x) = \frac{1}{b-a}$.

La fonction de densité de la loi exponentielle de paramètre λ est définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}$.