

## Fonction logarithme népérien - L'essentiel du cours

### a) Existence

$\ln x$  n'existe que si  $x > 0$ .

► *Exemple* : La fonction  $f$  définie par  $f(x) = \ln(x - 1)$  n'est définie que sur  $]1; +\infty[$  car il faut que  $x - 1$  soit strictement positif.

### b) Lien entre $\ln x$ et $e^x$

- $\ln b = a \Leftrightarrow b = e^a$
- $\ln(e^x) = x$  ;  $e^{\ln x} = x$  (pour  $x > 0$ )

► *Exemple* :  $\ln(e^{-2}) = -2$

### c) Valeurs particulières

$\ln 1 = 0$  ;  $\ln e = 1$

### d) Propriétés algébriques

Si  $a > 0$  et  $b > 0$  :

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b \quad ; \quad \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a \quad ; \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$$

Pour tout entier  $n$ ,  $\ln(a^n) = n \ln a$  ;  $\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$

► *Exemple* : Si  $x > 0$ ,  $\ln\left(\frac{1}{x^2}\right) = -\ln(x^2) = -2 \ln x$

### e) Signe de $\ln x$

- Si  $0 < x < 1$  alors  $\ln x$  est strictement négatif.
- Si  $x > 1$  alors  $\ln x$  est strictement positif.

### f) Limites

**En 0** :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$

**En  $+\infty$**  :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$

### g) Dérivées

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u} \quad (u > 0)$$

► *Exemple* :  $[\ln(x^2 + 1)]' = \frac{2x}{x^2 + 1}$

### h) Équations et inéquations

- $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$  ;  $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$  ;  $\ln a \leq \ln b \Leftrightarrow a \leq b$
- $\ln x = a \Leftrightarrow x = e^a$   
 $\ln x < a \Leftrightarrow 0 < x < e^a$  ;  $\ln x \leq a \Leftrightarrow 0 < x \leq e^a$   
 $\ln x > a \Leftrightarrow x > e^a$  ;  $\ln x \geq a \Leftrightarrow x \geq e^a$

► *Remarque* : Pour les équations et inéquations avec logarithme, ne pas oublier de commencer par définir les conditions d'existence (les expressions contenues dans un logarithme doivent être strictement positives).

► *Exemples d'équations et d'inéquations* :

•  $\ln x + \ln 2 = 5$ . Condition d'existence :  $x > 0$ .

Avec cette condition :

$$\ln x + \ln 2 = 5 \Leftrightarrow \ln(2x) = 5 \Leftrightarrow 2x = e^5 \Leftrightarrow x = \frac{e^5}{2}. \quad S = \left\{ \frac{e^5}{2} \right\}$$

•  $\ln(x + 2) \leq 1$ . Condition d'existence :  $x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$ .

Avec cette condition :

$$\ln(x + 2) \leq 1 \Leftrightarrow x + 2 \leq e \Leftrightarrow x \leq e - 2. \quad S = ]-2; e - 2]$$

- i) **Détermination du plus petit entier  $n$  tel que  $q^n \geq a$  (si  $q > 1$ ) ou tel que  $q^n \leq a$  (si  $0 < q < 1$ )**

**Méthode :** on isole  $q^n$  et on utilise que  $\ln(q^n) = n \ln q$ .

► *Exemples :*

- Recherche du plus petit entier  $n$  tel que  $2^n \geq 3000$  :

$$2^n \geq 3000 \Leftrightarrow \ln(2^n) \geq \ln(3000) \Leftrightarrow n \ln 2 \geq \ln 3000 \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 3000}{\ln 2} \quad (\text{car } \ln 2 > 0).$$

Or  $\frac{\ln 3000}{\ln 2} \approx 11,55$ . Le plus petit entier qui convient est donc 12.

- Recherche du plus petit entier  $n$  tel que  $0,8^n \leq 0,01$  :

$$0,8^n \leq 0,01 \Leftrightarrow \ln(0,8^n) \leq \ln(0,01) \Leftrightarrow n \ln 0,8 \leq \ln 0,01 \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 0,01}{\ln 0,8} \quad (\text{car } \ln 0,8 < 0).$$

Or  $\frac{\ln 0,01}{\ln 0,8} \approx 20,64$ . Le plus petit entier qui convient est donc 21.

- j) **Logarithme décimal**

- Pour tout  $x > 0$ ,  $\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$
- Pour tout entier (positif ou négatif)  $n$ ,  $\log(10^n) = n$

► *Exemples :*

$$\log 1 = 0 \quad ; \quad \log 10 = 1 \quad ; \quad \log 100 = 2$$

$$\log 0,1 = -1 \quad ; \quad \log 0,01 = -2$$