Fonction logarithme népérien - L'essentiel du cours

a) Existence

$\ln x$ n'existe que si $x > 0$.

► *Exemple :* La fonction f définie par $f(x) = \ln(x-1)$ n'est définie que sur $]1\,;+\infty[$ car il faut que $x-1$ soit strictement positif.

b) Lien entre $\ln x$ et e^x

- $\ln b = a \Leftrightarrow b = \mathrm{e}^a$
- $\ln(\mathrm{e}^x) = x$; $\mathrm{e}^{\ln x} = x$ (pour $x > 0$)

► *Exemple :* $\ln\left(\mathrm{e}^{-2}\right) = -2$

c) Valeurs particulières

$\ln 1 = 0$; $\ln \mathrm{e} = 1$

d) Propriétés algébriques

Si $a > 0$ et $b > 0$:

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$; $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln a$; $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$

Pour tout entier n, $\ln(a^n) = n\ln a$; $\ln\sqrt{a} = \dfrac{1}{2}\ln a$

► *Exemple :* Si $x > 0$, $\ln\left(\dfrac{1}{x^2}\right) = -\ln(x^2) = -2\ln x$

e) Signe de $\ln x$

- Si $0 < x < 1$ alors $\ln x$ est strictement négatif.
- Si $x > 1$ alors $\ln x$ est strictement positif.

f) Limites

En 0 **:** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x = -\infty$

En $+\infty$ **:** $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$

g) Dérivées

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$ $(u > 0)$

► *Exemple :* $\left[\ln(x^2+1)\right]' = \dfrac{2x}{x^2+1}$

h) Équations et inéquations

- $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$; $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$; $\ln a \leqslant \ln b \Leftrightarrow a \leqslant b$
- $\ln x = a \Leftrightarrow x = \mathrm{e}^a$
  $\ln x < a \Leftrightarrow 0 < x < \mathrm{e}^a$; $\ln x \leqslant a \Leftrightarrow 0 < x \leqslant \mathrm{e}^a$
  $\ln x > a \Leftrightarrow x > \mathrm{e}^a$; $\ln x \geqslant a \Leftrightarrow x \geqslant \mathrm{e}^a$

► *Remarque :* Pour les équations et inéquations avec logarithme, ne pas oublier de commencer par définir les conditions d'existence (les expressions contenues dans un logarithme doivent être strictement positives).

► *Exemples d'équations et d'inéquations :*

- $\ln x + \ln 2 = 5$. Condition d'existence : $x > 0$.
  Avec cette condition :
  $\ln x + \ln 2 = 5 \Leftrightarrow \ln(2x) = 5 \Leftrightarrow 2x = \mathrm{e}^5 \Leftrightarrow x = \dfrac{\mathrm{e}^5}{2}$. $S = \left\{\dfrac{\mathrm{e}^5}{2}\right\}$
- $\ln(x+2) \leqslant 1$. Condition d'existence : $x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$.
  Avec cette condition :
  $\ln(x+2) \leqslant 1 \Leftrightarrow x + 2 \leqslant \mathrm{e} \Leftrightarrow x \leqslant \mathrm{e} - 2$. $S =]-2; \mathrm{e}-2]$

i) Détermination du plus petit entier n tel que $q^n \geqslant a$ (si $q > 1$) ou tel que $q^n \leqslant a$ (si $0 < q < 1$)

Méthode : on isole q^n et on utilise que $\ln(q^n) = n \ln q$.

▶ *Exemples :*

• Recherche du plus petit entier n tel que $2^n \geqslant 3000$:

$2^n \geqslant 3000 \Leftrightarrow \ln(2^n) \geqslant \ln(3000) \Leftrightarrow n\ln 2 \geqslant \ln 3000 \Leftrightarrow n \geqslant \dfrac{\ln 3000}{\ln 2}$ (car $\ln 2 > 0$).

Or $\dfrac{\ln 3000}{\ln 2} \approx 11,55$. Le plus petit entier qui convient est donc 12.

• Recherche du plus petit entier n tel que $0,8^n \leqslant 0,01$:

$0,8^n \leqslant 0,01 \Leftrightarrow \ln(0,8^n) \leqslant \ln(0,01) \Leftrightarrow n\ln 0,8 \leqslant \ln 0,01 \Leftrightarrow n \geqslant \dfrac{\ln 0,01}{\ln 0,8}$ (car $\ln 0,8 < 0$).

Or $\dfrac{\ln 0,01}{\ln 0,8} \approx 20,64$. Le plus petit entier qui convient est donc 21.

j) Logarithme décimal

• Pour tout $x > 0$, $\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$

• Pour tout entier (positif ou négatif) n, $\log(10^n) = n$

▶ *Exemples :*

$\log 1 = 0 \quad ; \quad \log 10 = 1 \quad ; \quad \log 100 = 2$

$\log 0,1 = -1 \quad ; \quad \log 0,01 = -2$