Limites de fonctions - L'essentiel du cours

1) Limites des fonctions de références

Propriété

• En $+\infty$:

$\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^3} = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$

• En $-\infty$:

$\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^3} = 0$

• En 0 :

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \dfrac{1}{x^3} = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} \dfrac{1}{x} = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} \dfrac{1}{x^3} = -\infty$

2) Opérations sur les limites

• Limite d'une somme :

$\underbrace{(\quad)}_{\to l}+\underbrace{(\quad)}_{\to l'} \to l+l'$	$\underbrace{(\quad)}_{\to l}+\underbrace{(\quad)}_{\to+\infty} \to +\infty$	$\underbrace{(\quad)}_{\to l}+\underbrace{(\quad)}_{\to-\infty} \to -\infty$
$\underbrace{(\quad)}_{\to+\infty}+\underbrace{(\quad)}_{\to+\infty} \to +\infty$	$\underbrace{(\quad)}_{\to-\infty}+\underbrace{(\quad)}_{\to-\infty} \to -\infty$	

• Limite d'un produit :

$\underbrace{(\quad)}_{\to l}\times\underbrace{(\quad)}_{\to l'} \to l\times l'$	$\underbrace{(\quad)}_{\to l>0}\times\underbrace{(\quad)}_{\to+\infty} \to +\infty$	$\underbrace{(\quad)}_{\to l<0}\times\underbrace{(\quad)}_{\to+\infty} \to -\infty$
$\underbrace{(\quad)}_{\to l>0}\times\underbrace{(\quad)}_{\to-\infty} \to -\infty$	$\underbrace{(\quad)}_{\to l<0}\times\underbrace{(\quad)}_{\to-\infty} \to +\infty$	$\underbrace{(\quad)}_{\to+\infty}\times\underbrace{(\quad)}_{\to+\infty} \to +\infty$
$\underbrace{(\quad)}_{\to-\infty}\times\underbrace{(\quad)}_{\to-\infty} \to +\infty$	$\underbrace{(\quad)}_{\to-\infty}\times\underbrace{(\quad)}_{\to+\infty} \to -\infty$	

• Limite de l'inverse :

$\left(\dfrac{1}{\underbrace{(\quad)}_{\to l\neq0}}\right) \to \frac{1}{l}$	$\left(\dfrac{1}{\underbrace{(\quad)}_{\to\pm\infty}}\right) \to 0$	$\left(\dfrac{1}{\underbrace{(\quad)}_{\to0^+}}\right) \to +\infty$	$\left(\dfrac{1}{\underbrace{(\quad)}_{\to0^-}}\right) \to -\infty$

• Limite d'un quotient :

Pour les quotients (autres que les fonctions rationnelles en $\pm\infty$), on « sépare la fraction » : $\dfrac{(\quad)}{(\quad)} = (\quad)\times\dfrac{1}{(\quad)}$

• Formes indéterminées :

Les deux cas de forme indéterminée sont : $\underbrace{(\quad)}_{\to+\infty}+\underbrace{(\quad)}_{\to-\infty}$; $\underbrace{(\quad)}_{\to\pm\infty}\times\underbrace{(\quad)}_{\to0}$

• Polynômes et fonctions rationnelles en $\pm\infty$:

• En $\pm\infty$, la limite d'une fonction polynome est égale à la limite de son terme de plus haut degré.
• En $\pm\infty$, la limite d'une fonction rationnelle est égale à la limite du quotient des termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur *(ne pas oublier de simplifier le quotient des termes de plus haut degré avant de déterminer la limite)*.

3) Asymptotes

• Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ alors la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à C_f.
• Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = l$ alors la droite d'équation $y = l$ est une asymptote horizontale à C_f en $\pm\infty$.