

Limites de fonctions - L'essentiel du cours

1) Limites des fonctions de références

— PROPRIÉTÉ —

• En $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} = 0 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

• En $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^3} = 0$$

• En 0 :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty \quad ; \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x^2} = +\infty \quad ; \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x^3} = +\infty \quad ; \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty \quad ; \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x^2} = +\infty \quad ; \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x^3} = -\infty$$

2) Opérations sur les limites

• Limite d'une somme :

$\underbrace{(\quad)}_{\rightarrow l} + \underbrace{(\quad)}_{\rightarrow l'} \rightarrow l + l'$	$\underbrace{(\quad)}_{\rightarrow l} + \underbrace{(\quad)}_{\rightarrow +\infty} \rightarrow +\infty$	$\underbrace{(\quad)}_{\rightarrow l} + \underbrace{(\quad)}_{\rightarrow -\infty} \rightarrow -\infty$
$\underbrace{(\quad)}_{\rightarrow +\infty} + \underbrace{(\quad)}_{\rightarrow +\infty} \rightarrow +\infty$	$\underbrace{(\quad)}_{\rightarrow -\infty} + \underbrace{(\quad)}_{\rightarrow -\infty} \rightarrow -\infty$	

• Limite d'un produit :

$\underbrace{(\quad)}_{\rightarrow l} \times \underbrace{(\quad)}_{\rightarrow l'} \rightarrow l \times l'$	$\underbrace{(\quad)}_{\rightarrow l > 0} \times \underbrace{(\quad)}_{\rightarrow +\infty} \rightarrow +\infty$	$\underbrace{(\quad)}_{\rightarrow l < 0} \times \underbrace{(\quad)}_{\rightarrow +\infty} \rightarrow -\infty$
$\underbrace{(\quad)}_{\rightarrow l > 0} \times \underbrace{(\quad)}_{\rightarrow -\infty} \rightarrow -\infty$	$\underbrace{(\quad)}_{\rightarrow l < 0} \times \underbrace{(\quad)}_{\rightarrow -\infty} \rightarrow +\infty$	$\underbrace{(\quad)}_{\rightarrow +\infty} \times \underbrace{(\quad)}_{\rightarrow +\infty} \rightarrow +\infty$
$\underbrace{(\quad)}_{\rightarrow -\infty} \times \underbrace{(\quad)}_{\rightarrow -\infty} \rightarrow +\infty$	$\underbrace{(\quad)}_{\rightarrow -\infty} \times \underbrace{(\quad)}_{\rightarrow +\infty} \rightarrow -\infty$	

• Limite de l'inverse :

$\underbrace{(\quad)}_{\rightarrow l \neq 0} \rightarrow \frac{1}{l}$	$\underbrace{(\quad)}_{\rightarrow \pm\infty} \rightarrow 0$	$\underbrace{(\quad)}_{\rightarrow 0^+} \rightarrow +\infty$	$\underbrace{(\quad)}_{\rightarrow 0^-} \rightarrow -\infty$
-----------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------

• Limite d'un quotient :

Pour les quotients (autres que les fonctions rationnelles en $\pm\infty$), on « sépare la fraction » : $\frac{(\quad)}{(\quad)} = (\quad) \times \frac{1}{(\quad)}$

• Formes indéterminées :

Les deux cas de forme indéterminée sont : $\underbrace{(\quad)}_{\rightarrow +\infty} + \underbrace{(\quad)}_{\rightarrow -\infty}$; $\underbrace{(\quad)}_{\rightarrow \pm\infty} \times \underbrace{(\quad)}_{\rightarrow 0}$

• Polynômes et fonctions rationnelles en $\pm\infty$:

- En $\pm\infty$, la limite d'une fonction polynome est égale à la limite de son terme de plus haut degré.
- En $\pm\infty$, la limite d'une fonction rationnelle est égale à la limite du quotient des termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur (*ne pas oublier de simplifier le quotient des termes de plus haut degré avant de déterminer la limite*).

3) Asymptotes

- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ alors la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à C_f .
- Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$ alors la droite d'équation $y = b$ est une asymptote horizontale à C_f en $\pm\infty$.