

Complément sur la fonction exponentielle et introduction au logarithme - L'essentiel du cours

Fonction exponentielle

a) Existence

e^x existe pour tout réel x .

b) Valeurs particulières

$$e^0 = 1 \quad ; \quad e^1 = e \quad ; \quad e^{-1} = \frac{1}{e}$$

c) Propriétés algébriques

Pour tous réels a et b :

$$e^a \times e^b = e^{a+b} \quad ; \quad \frac{1}{e^a} = e^{-a} \quad ; \quad \frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$$

Pour tout entier n , $(e^a)^n = e^{na}$

► *Exemple* : Pour tout x , $(e^{-x})^2 \times e^{3x} = e^{-2x} \times e^{3x} = e^x$

d) Signe de e^x

Pour tout réel x , e^x est strictement positif.

e) Limites

$$\text{En } +\infty : \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$
$$\text{En } -\infty : \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

f) Dérivées

$$(e^x)' = e^x \quad ; \quad (e^u)' = u'e^u$$

► *Exemple* : $[e^{-0,5x}]' = -0,5 e^{-0,5x}$

g) Lien entre $\ln x$ et e^x

- $e^a = b \Leftrightarrow a = \ln b$
- $\ln(e^x) = x \quad ; \quad e^{\ln x} = x$ (pour $x > 0$)

► *Exemples* :

$$e^{\ln 6} = 6$$

$$e^{-\ln 4} = \frac{1}{e^{\ln 4}} = \frac{1}{4}$$

$$e^{3 \ln 2} = (e^{\ln 2})^3 = 2^3 = 8$$

$$e^{\ln 2 + \ln 5} = e^{\ln 2} \times e^{\ln 5} = 2 \times 5 = 10$$

$$e^{\ln 6 - \ln 3} = \frac{e^{\ln 6}}{e^{\ln 3}} = \frac{6}{3} = 2$$

► **Remarque** :

valeurs remarquables du logarithme : $\ln 1 = 0 \quad ; \quad \ln e = 1$

h) Équations et inéquations

$$\bullet e^a = e^b \Leftrightarrow a = b \quad ; \quad e^a < e^b \Leftrightarrow a < b \quad ; \quad e^a \leq e^b \Leftrightarrow a \leq b$$

• Si $b > 0$:

$$e^x = b \Leftrightarrow x = \ln b$$

$$e^x < b \Leftrightarrow x < \ln b \quad ; \quad e^x \leq b \Leftrightarrow x \leq \ln b$$

$$e^x > b \Leftrightarrow x > \ln b \quad ; \quad e^x \geq b \Leftrightarrow x \geq \ln b$$

► *Exemple* : $4e^{-x} - 8 = 0 \Leftrightarrow 4e^{-x} = 8 \Leftrightarrow e^{-x} = 2 \Leftrightarrow -x = \ln 2 \Leftrightarrow x = -\ln 2$
 $S = \{-\ln 2\}$