

Complément sur les suites

► Exercice n°1

Déterminer les limites suivantes :

- | | |
|--|--|
| a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1,7)^n$ | b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (0,85)^n$ |
| c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3 \times (0,6)^n$ | d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} -4 \times (1,7)^n$ |
| e) $\lim_{n \rightarrow +\infty} 5 + 5 \times (1,8)^n$ | f) $\lim_{n \rightarrow +\infty} 10 - 2 \times (0,75)^n$ |
| g) $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-2n}$ | h) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n + n^2$ |

► Exercice n°2

On place un capital $U_0 = 8000$ euros à 3 % par an avec **intérêts simples** (autrement dit, chaque année, on reçoit les mêmes intérêts égaux à 3 % du capital **initial**).

On note U_n le capital obtenu au bout de n années.

1. Quel est le montant des intérêts que rapporte ce placement chaque année?
2. Donner la nature et la raison de la suite (U_n) .
3. Exprimer U_n en fonction de n .
4. Calculer la valeur du capital au bout de 15 ans.

► Exercice n°3

On place un capital $U_0 = 8000$ euros à 3 % par an avec **intérêts composés** (autrement dit, chaque année, on reçoit des intérêts égaux à 3 % du capital de **l'année précédente**).

On note U_n le capital obtenu au bout de n années.

1. Comment passe-t-on de la valeur du capital d'une année à celle de l'année suivante?
2. Donner la nature et la raison de la suite (U_n) .
3. Exprimer U_n en fonction de n .
4. Calculer la valeur du capital au bout de 8 ans.
5. Au bout de combien d'années la valeur du capital aura-t-elle doublé?

► Exercice n°4

Soit (U_n) la suite géométrique de premier terme $U_0 = 5$ et de raison $q = 3$.

1. Calculer U_2 et U_5 .
2. Exprimer U_n en fonction de n .

3. Déterminer la limite de la suite (U_n) .

4. Calculer $U_0 + U_1 + \dots + U_8$

► Exercice n°5

On dispose d'un échantillon d'os fossiles contenant initialement $M_0 = 10$ grammes de carbone 14. On considère que la masse de carbone 14 dans un tel échantillon diminue à raison de 1,2% par siècle et on note M_n la masse en grammes de carbone 14 contenue dans l'échantillon au bout de n siècles.

1. Justifier que (M_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison.
2. Exprimer M_n en fonction de n .
3. Déterminer au bout de combien de siècles, la masse de carbone 14 contenue dans l'échantillon sera inférieure à 5 grammes.

► Exercice n°6

La période de désintégration d'un élément radioactif est le temps au bout duquel la masse d'un échantillon est divisée par 2 (cette période est constante).

On note U_0 la masse initiale de l'élément radioactif et U_n sa masse au bout de n périodes de désintégration.

1. Justifier que la suite (U_n) est géométrique et donner sa raison.
2. La période de désintégration du radium est de 1500 ans et on considère un échantillon de 5 g de radium.
On note $U_0 = 5$ et U_n la masse de l'échantillon au bout de n périodes de désintégration.
 - a) Exprimer U_n en fonction de n .
 - b) Calculer ce que sera la masse de l'échantillon dans 10500 ans.
 - c) Au bout de combien d'années la masse de l'échantillon sera-t-elle inférieure à 5 milligramme?

► Exercice n°7

Une plaque de verre teintée est telle qu'un rayon lumineux qui la traverse perd 20 % de son intensité lumineuse et on fait traverser à un rayon lumineux d'intensité 50 cd une série de ces plaques de verre teintée.

On note $I_0 = 50$ et I_n l'intensité du rayon lumineux après le passage de n plaques.

1. Justifier que la suite (I_n) est géométrique et donner sa raison.
2. Exprimer I_n en fonction de n .
3. Calculer l'intensité du rayon lumineux après le passage de 4 plaques.
4. On cherche à déterminer le plus petit nombre de plaques que le rayon lumineux doit franchir pour que son intensité devienne inférieure à 1 cd.

a) **Méthode 1 : avec un script python.**

Compléter la 3^e ligne du script ci-dessous pour qu'il réponde à la question.

```
n=0
I=50
while ..... :
    I=0.8*I
    n=n+1
print(n)
```

b) **Méthode 2 : en résolvant une inéquation.**

Déterminer, par le calcul, le plus entier n tel que $I_n \leq 1$.

► **Exercice n°8**

On tire n fois avec remise une carte dans un jeu de 32 cartes et on note X le nombre d'as obtenus.

- Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
- On note p_n la probabilité de n'obtenir aucun as lors de ce tirage de n cartes.
 - Exprimer p_n en fonction de n .
 - Quelle est la nature de la suite (p_n) ?
 - Déterminer le sens de variation et la limite de la suite (p_n) .
- On note q_n la probabilité d'obtenir au moins un as lors de ce tirage de n cartes.
 - Exprimer q_n en fonction de n .
 - Déterminer la limite de la suite (q_n) .
 - Déterminer le nombre minimum n de cartes qu'il faut tirer afin que la probabilité d'obtenir au moins un as soit supérieure à 0,99.

► **Exercice n°9**

Dans la feuille de calcul ci-dessous, on cherche à déterminer dans la colonne B les premiers termes de la suite (U_n) définie par $U_0 = 10$ et $U_{n+1} = 2U_n - 5$.

	A	B
1	n	Un
2	0	
3	1	
4	2	
5	3	

- Quelle valeur faut-il entrer dans la cellule B2 ?
- Quelle formule faut-il entrer dans la cellule B3 pour qu'en la recopiant ensuite vers le bas on obtienne automatiquement les premiers termes de la suite (U_n) ?

► **Exercice n°10**

Le script python ci-dessous permet de calculer le terme de rang n d'une suite (U_n) définie de façon récurrente.

```
U=25
n=int(input("n? "))
for i in range(1,n+1):
    U=0.9*U+2
print(U)
```

- Exprimer U_{n+1} en fonction de U_n et donner la valeur de U_0 .
- Calculer U_1 et U_2 .
- On considère la suite (V_n) définie par $V_n = U_n - 20$.
 - Calculer V_0, V_1 et V_2 .
 - Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison.
 - En déduire V_n , puis U_n en fonction de n .
- Calculer U_{10} .
- Déterminer la limite de la suite (U_n) .
- Calculer $V_0 + V_1 + \dots + V_9$. En déduire $U_0 + U_1 + \dots + U_9$.

► **Exercice n°11**

Après son installation, un lundi matin, un aquarium contient 280 litres d'eau et des poissons.

Par évaporation, le volume d'eau dans l'aquarium diminue de 2% par semaine et pour compenser cette évaporation, on ajoute chaque lundi matin, en une seule fois, 5 litres d'eau.

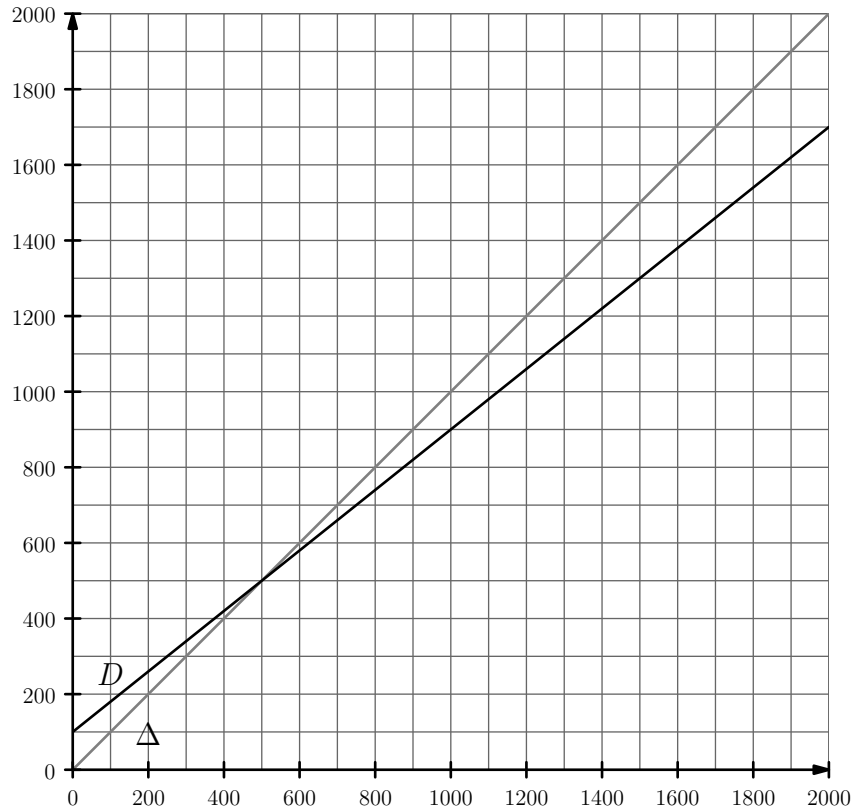
On note $U_0 = 280$, le volume initial d'eau en litres dans l'aquarium et, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note U_n le volume d'eau dans l'aquarium, en litres, n semaines après son installation, immédiatement après l'ajout hebdomadaire des 5 litres d'eau.

- Justifier que pour tout entier naturel n , $U_{n+1} = 0,98U_n + 5$.
- On considère la suite (V_n) définie pour tout entier naturel n par $V_n = U_n - 250$.
 - Justifier que (V_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme V_0 .
 - En déduire V_n , puis U_n en fonction de n .
- Compte tenu du nombre de poissons, cet aquarium doit contenir en permanence au minimum 240 litres d'eau. Justifier que cette préconisation est respectée.

► **Exercice n°12**

Le 1er janvier 2020, une entreprise compte $U_0 = 2000$ employés. À partir de l'année 2020, 20% de l'effectif partira à la retraite chaque année et l'entreprise embauchera 100 jeunes par an pour compenser ces départs. On note U_n le nombre d'employés de l'entreprise le 1er janvier de l'année $(2020 + n)$.

1. Expliquer pourquoi on a pour tout n , $U_{n+1} = 0,8 \times U_n + 100$.
2. Sur le graphique ci-dessous figurent la droite D d'équation $y = 0,8x + 100$ et la droite Δ d'équation $y = x$.



Construire sur le graphique U_1, U_2, U_3 et U_4 .

3. Déterminer le réel a tel que la suite (V_n) définie par $V_n = U_n - a$ soit une suite géométrique de raison 0,8.
4. Exprimer V_n , puis U_n en fonction de n .
5. Quel sera le nombre d'employés le 1er janvier 2025 ?

6. Calculer $U_{n+1} - U_n$ et montrer que, pour tout n , $U_{n+1} - U_n = -300 \times 0,8^n$.
7. En déduire le sens de variation de la suite (U_n) .
8. Déterminer la limite de la suite (U_n) .
9. Déterminer l'année à partir de laquelle le nombre d'employés sera inférieur à 600.

► **Exercice n°13**

Dans une certaine région, l'accroissement de la population de lièvres diminue de moitié chaque année. On note $P_0 = 500\,000$ la population initiale, $P_1 = 700\,000$ la population au bout de un an et P_n la population au bout de n années.

On a donc, pour tout n , $P_{n+2} - P_{n+1} = 0,5(P_{n+1} - P_n)$.

1. Calculer P_2 et P_3 .
2. On considère les suites (U_n) et (V_n) définies par :
 $U_n = P_{n+1} - P_n$ et $V_n = P_{n+1} - 0,5P_n$.
 - a) Montrer que (U_n) est une suite géométrique et exprimer U_n en fonction de n .
 - b) Montrer que (V_n) est une suite constante. En déduire la valeur de V_n , pour tout n .
 - c) Montrer que $2(V_n - U_n) = P_n$ et exprimer P_n en fonction de n .
 - d) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n$.

► **Exercice n°14**

Un emprunteur contracte auprès d'une banque un prêt d'un montant de 120 000 euros au taux annuel de 1 %. On note :

- $U_0 = 120\,000$, le capital emprunté ;
- A , l'annuité que doit rembourser chaque année l'emprunteur (qui dépend de la durée de remboursement et que l'on va chercher à déterminer) ;
- U_n , le capital qui reste à rembourser au bout de n années.

Quand on emprunte au taux de 1 %, la banque considère qu'elle doit recevoir, en plus de l'annuité de remboursement, des intérêts annuels égaux à 1 % de la somme qui reste à rembourser. Ces intérêts s'ajoutent au capital que doit rembourser l'emprunteur.

On a ainsi, pour tout entier positif n , $U_{n+1} = U_n - A + \frac{1}{100}U_n$.

La suite (U_n) est donc définie par $U_0 = 120\,000$ et $U_{n+1} = 1,01U_n - A$.

1. Justifier que (V_n) définie par $V_n = U_n - 100A$ est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme V_0 .
2. En déduire V_n , puis U_n en fonction de n et de A .
3. Déterminer A pour que le prêt soit remboursé en 15 ans, c'est à dire que $U_{15} = 0$. En déduire les mensualités que doit payer l'emprunteur à sa banque.